复变函数与
积分变换

课程简介

“复变函数与积分变换”是高等院校理工科学生必须具备的数学知识，它是微积分的重要后续课程。内容包括解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射以及拉普拉斯变换等。

预修要求：微积分

教材：《复变函数与拉普拉斯变换》

金忆丹 尹永成，浙大出版社 2003年

课程教学网站：“浙大钉”“学在浙大”等

总评成绩占比：

线下作业与平时表现：30%

阶段测试：20%

期末考试：50%

期末考试：统一命题，由学校安排考场，统一标准阅卷。

阶段测试：用四-五等级评分，采用相对评分办法。

作业：每周一次

复变函数与拉普拉斯变换

第一章预备知识

第1.1节　复数及其表达

定义：形如 $z = x + iy$ 的数称为复数，其中

实数 $x = \text{Re}\, z$ 称为 z 的实部，

实数 $y = \text{Im}\, z$ 称为 z 的虚部，

$i \ (i^2 = -1)$ 称为虚数单位。

特别，称 $z = iy \ (y \neq 0)$ 为纯虚数；$z = x$ 为实数；

$\bar{z} = x - iy$ 称为 z 的共轭复数。

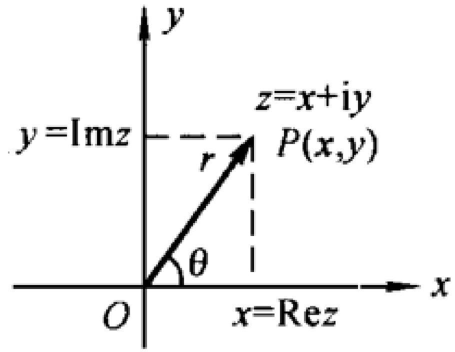
$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

复数不能比较大小！

复平面

$z = x + iy \xleftrightarrow{\text{一对一}}$

点 $P(x, y)$ (或 向量 $\overrightarrow{OZ}$)



复数 $z = x + iy$

称 x 轴为实轴，y轴为 虚轴；

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$称为 z 的模；

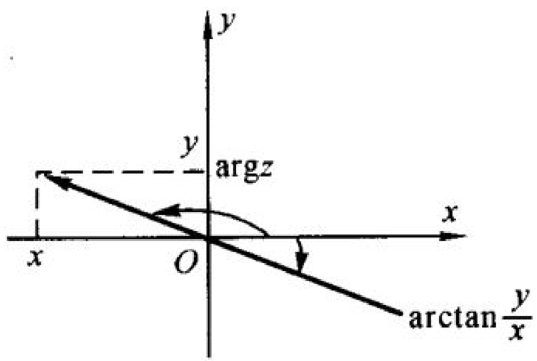
$\theta = Arg\ z \quad (\tan\theta = \dfrac{y}{x})$ 称为 z 的辐角（无穷多个），

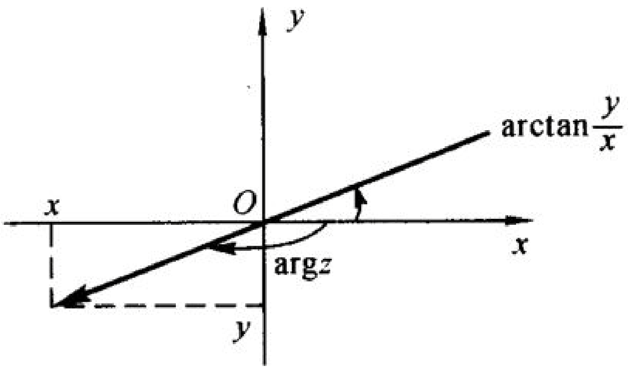
其中 $\theta_0 = \arg z \in (-\pi, \pi]$ 称为 辐角主值，即

$$Arg\ z = \arg z + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \cdots)$$

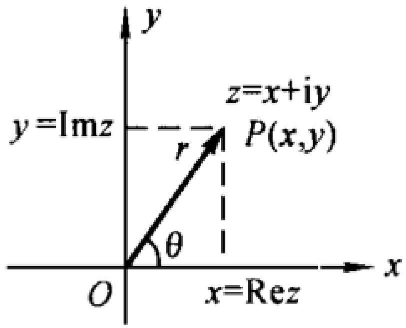
辐角主值的计算

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & (I, IV \text{ 象限}) \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & (II \text{ 象限}) \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & (III \text{ 象限}) \end{cases}$$





复数其它表示法：



$$z = x + iy$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$ （三角形式）

$$= re^{i\theta}$$ （指数形式）

$$(\, r = |z|,\ \theta = Arg\ z\,)$$

欧拉公式： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

例 将 $z=-1+i\sqrt{3}$ 化为三角形式和指数形式。

解:

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

$$\arg z=\arctan\frac{\sqrt{3}}{(-1)}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

第1.2节　　复数的运算

复数的四则运算

定义复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 的加法，减法及乘除法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0).$$

加法乘法：交换律　结合律　分配律

复数域 C ：全体复数（＋　－　·÷　运算）

常见性质：

代数恒等式仍成立，如：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|，\qquad |z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||$$

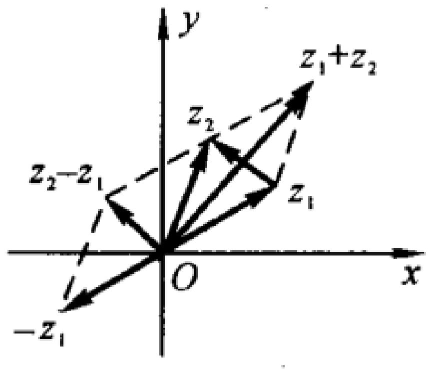
$$|z|=|\bar{z}|，\quad |z|^2=z\cdot\bar{z}，\qquad \overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}\qquad \overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$$

$\arg z=-\arg\bar{z}$，　当 z 不在负实轴上时。

复数加减法的几何意义：

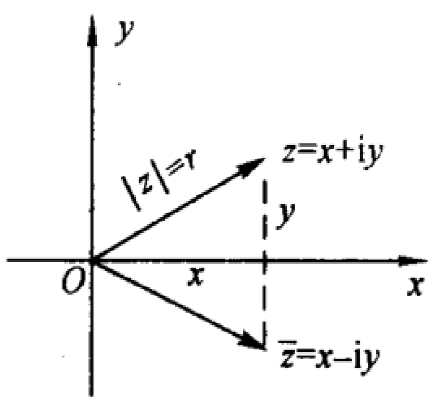
平行四边形法则



复数的向量加减

共轭复数的几何意义：

z，$\bar{z}$ 关于实轴对称



共轭复数

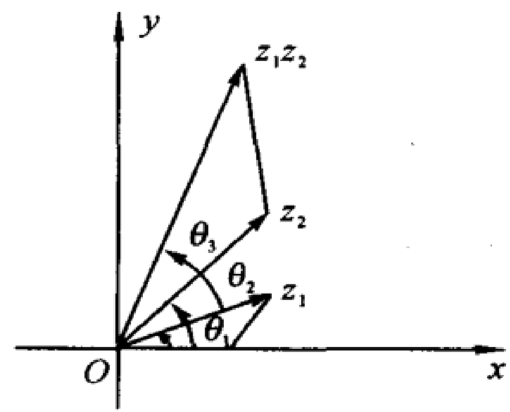
复数乘积与商的几何意义：

设复数 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$\because \quad z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$



两个复数相乘

$$\therefore \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$Arg\,(z_1 z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$$

类似： $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$$\therefore \quad |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|,$$

$$Arg\,(z_1 / z_2) = Arg\ z_1 - Arg\ z_2$$

复数的乘幂与方根

设 $z = re^{i\theta}$ ，由归纳法可得其 n 次幂

$$
\begin{aligned}
z^n &= r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\
&= r^n e^{in\theta}.
\end{aligned}
$$

特别，取 $r = 1$ 即得 **de Moivre 公式**：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

$$\therefore |z^n| = |z|^n, \quad Arg\ z^n = n\, Arg\ z.$$

例 求 $(1+i)^{2022}$.

解： $(1+i)^{2022}$

$$=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2022}$$

$$=2^{1011}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 2022\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 2022\right)\right)$$

$$=2^{1011}\left(\cos\left(505\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(505\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=-2^{1011}i$$

复数方根的定义：设 z 是已知复数，n 为正整数，称满足方程 $w^n = z$ 的所有复数 w 为 z 的 n **次方根，**记为 $w = \sqrt[n]{z}$.

如何求 $\sqrt[n]{z}$. 设 $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ 则：

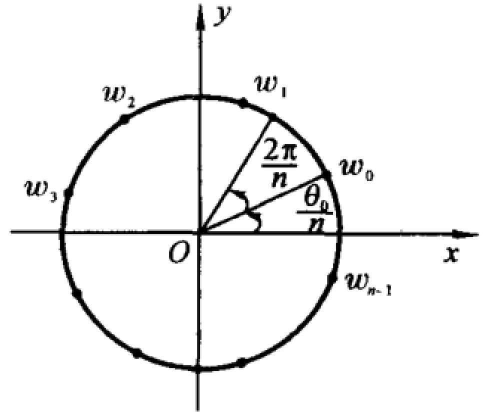
$$re^{i\theta} = \rho^n e^{i\varphi n}$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r},\ n\varphi = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\therefore w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)}$$

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)}$$



n 个根均匀分布在以原点为中心，$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆周上。

例： 求 $z = 1 + i$ 的 4 次方根。

解： $$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

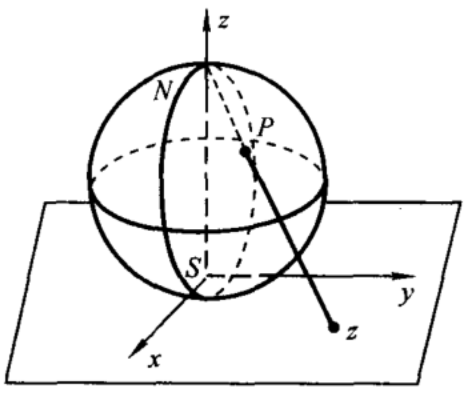
$$\therefore \quad w_k = (\sqrt[4]{z})_k$$

$$= (\sqrt{2})^{1/4} e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)/4}$$

$$= \sqrt[8]{2} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})} \quad (k = 0, 1, 2 3).$$

第1.3节 复球面与无穷远点

如右图，利用球极平面射影法，建立球面 $S\setminus\{N\}$ 到复平面 C 的一一对应： $\mathrm{P}\leftrightarrow z.$



复球面

易见， $\mathrm{P}\to\mathrm{N}\Longleftrightarrow|z|\to\infty.$

称球面北极 N 所对应的“点”为复平面 的无穷远点，记为 ∞ 。

$\overline{C}=C\cup\{\infty\}$ 称为扩充复平面，

S 称为复球面。

注意:与一元函数微积分中数轴上附加的 $-\infty$ 与 $+\infty$ 所不同的是,扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的 ∞ 点只有一点.

关于 ∞ 点的运算,需作如下的几个规定:

(1) $z \neq \infty$,则 $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$;

(2) $z \neq 0$,则 $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$;

(3) $z \neq \infty$,则 $\dfrac{\infty}{z} = \infty, \dfrac{z}{\infty} = 0$;

(4) $z \neq 0$,则 $\dfrac{z}{0} = \infty$;

(5) $|\infty| = +\infty$,∞ 的实部、虚部、辐角均无意义.

第1.4节 复平面上的点集

几个概念

$$D(z_0,\delta)=\{z\in C \mid |z-z_0|<\delta\}$$

…… z_0 的 δ 邻域

$$D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}=\{z\in C \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$$

…… z_0 的 δ 去心 邻域

有界域 $D:\exists M>0,\ |z|\le M,\ \forall z\in D.$

否则，称为无界域。

设有点集 E 及一点 P：

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P) \subset E$，

  则称 P 为 E 的内点；

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P) \cap E = \varnothing$，

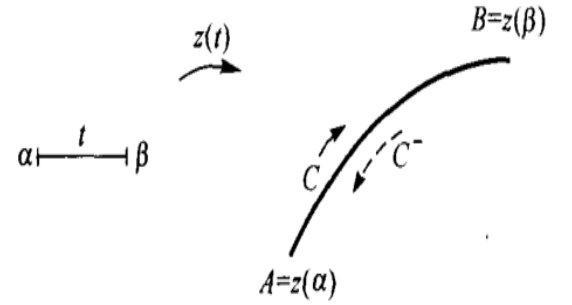
  则称 P 为 E 的外点；

- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E中的内点也含 E 的外点，则称 P 为 E 的边界点 .

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集；
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E；
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集；
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 , 则称 D 是连通的；
- 连通的开集称为开区域 ,简称区域；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

曲线 C 参数方程：

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\quad \alpha \le t \le \beta$$

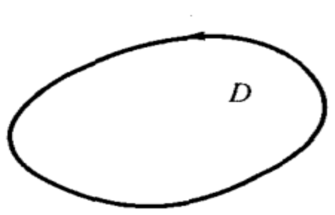


$$\Rightarrow z = z(t) = x(t) + iy(t),\ \alpha \le t \le \beta$$

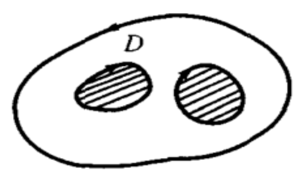
…… 复平面上的一条有向曲线。

特殊：当 $z(\alpha)=z(\beta)$ 时，闭曲线。

单连通区域（无洞）　　复连通区域（有洞）

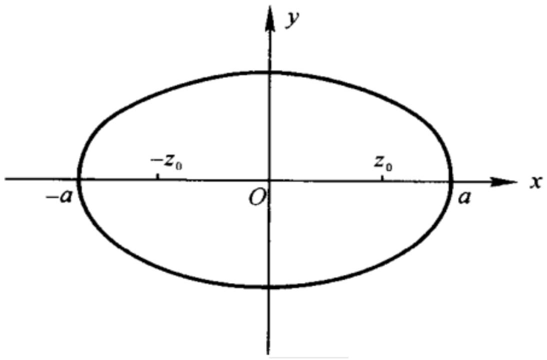


单连通区域



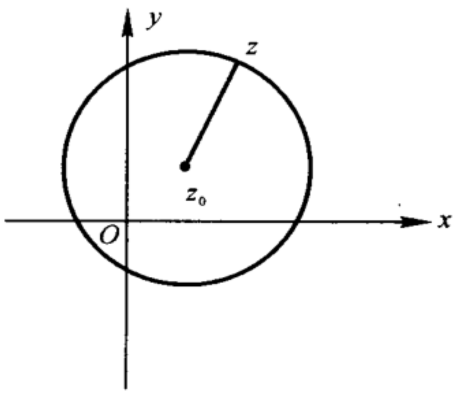
多连通区域

平面图形的复数表示（例）



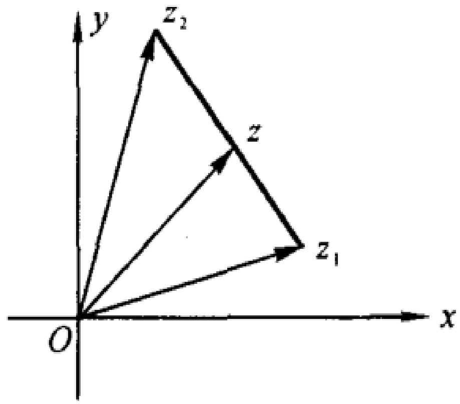
椭圆

$$|z-z_0|+|z+z_0|=R$$



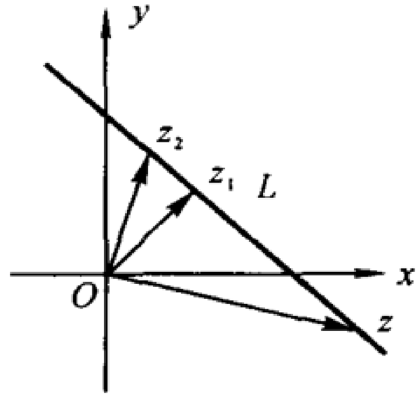
圆

$$|z-z_0|=R$$



直线段 $\overline{z_1 z_2}$

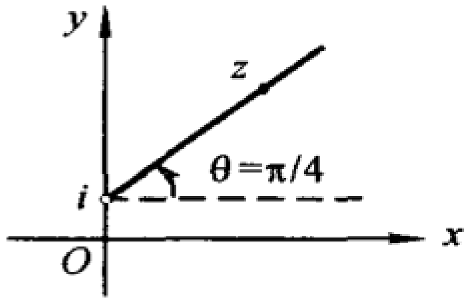
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \le t \le 1)$$



过 z_1 与 z_2 两点的直线 L

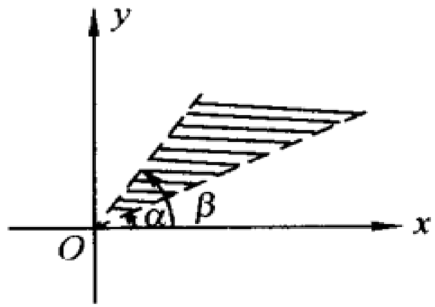
直线

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (-\infty \le t \le +\infty)$$



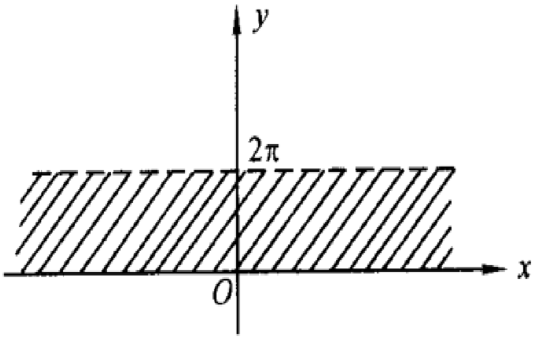
射线

$$\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$$



角域

$$\alpha<\arg z<\beta$$



带域

$$0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi$$

实轴： $\mathrm{Im}\, z = 0,$ 　虚轴： $\mathrm{Re}\, z = 0$

……

复变函数与拉普拉斯变换

第二章 解析函数

第2.1节　复变函数

一　复变函数的概念

称复数域中的集合 D 到复数域中的映射 f 为定义在 D 上的**复变函数**，记为 $w=f(z), z\in D.$

D …定义域， $f(D)$ …值域。

若 w 唯一，称 f 为**单值函数**，

例　$w=|z|, z\in C.$

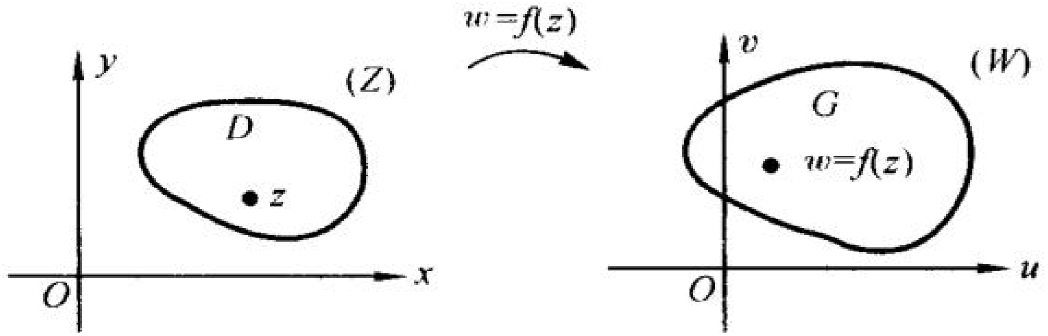
若 w不唯一，称 f 为**多值函数**，

例　$w=Arg\ z,\quad z\in C\setminus\{0\}.$

记 $z = x + iy$ ， $w = u + iv$ ，则

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

复变函数无法在三维空间中用图表示，常视其为两复平面之间的变换或映射。



映射关系

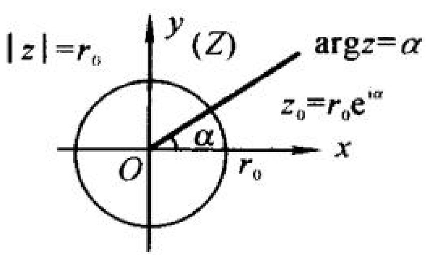
例2. 设函数 $w = z^2$， 问它把下列 Z 平面上的点集分别映射成 W 平面上的什么点集？

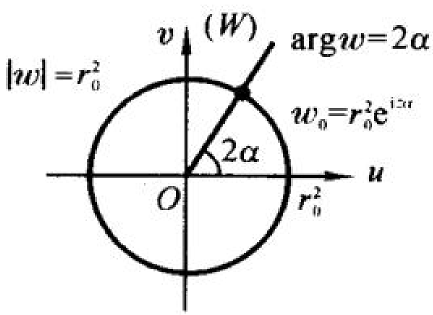
（1）圆 $|z| < r_0$.

解： $|w| = |z|^2 < r_0^2$ ……圆

（2）射线 $\arg z = \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

解： $\arg w = 2\arg z = 2\alpha \in (-\pi, \pi]$ ……射线





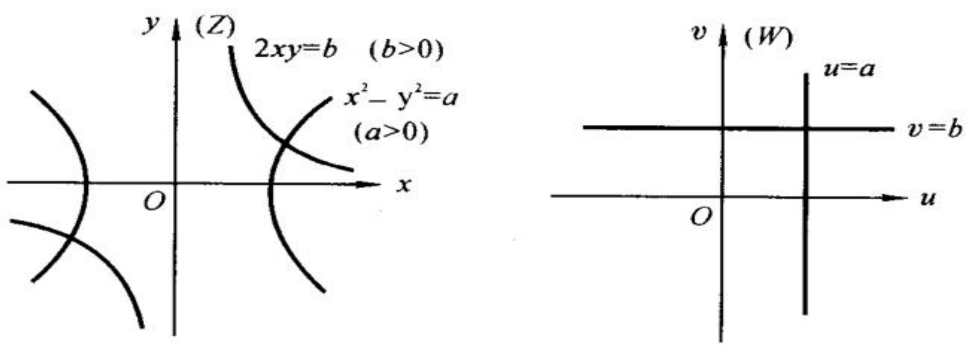
（3）双曲线 $x^2 - y^2 = a, 2xy = b,\ a, b$ 实数

解： 记 $z = x + iy$

$$w = u + iv = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\therefore\ x^2 - y^2 = a \to u = a$$ ......直线

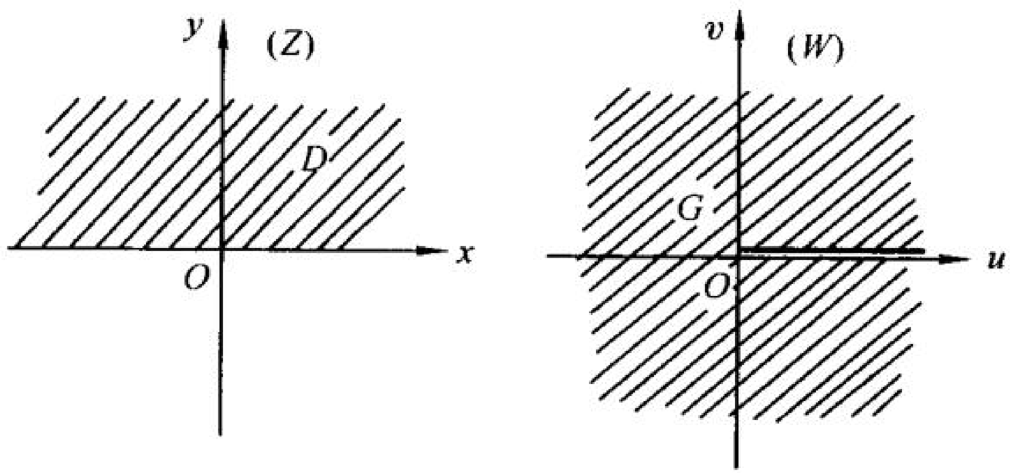
$$2xy = b \to v = b$$ ......直线



（4）上半平面 $D=\{z=x+iy \mid y>0\}$

$(D=\{z=re^{i\theta} \mid 0<\theta<\pi\})$

解： $D \to G=\{w=\rho e^{i\varphi} \mid 0<\varphi=2\theta<2\pi\}$



二　极限与连续

极限的定义： 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域内有定义，若有一数 A，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

极限的性质

定理 如果极限存在，则必唯一。

定理 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow f(z) = A + \alpha(z),$

其中 $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z) = 0.$

定理 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = v_0,$$

其中：$z_0 = x_0 + iy_0, \quad A = u_0 + iv_0,$

$f(z) = u + iv.$

定理 **设** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, **则:**

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=AB;$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)/g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)/\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0);$

(4) 若 $\lim\limits_{w\to A} g(w)=c$, 则 $\lim\limits_{z\to z_0} g(f(z))=c$.

连续的定义：

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0点连续。

即：$\forall\ \varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若函数 $f(z)$ 在 D上每一点连续，则称 $f(z)$ 在 D 上是连续函数。

连续函数的性质

定理 函数$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点连续的充分必要条件是二元函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)点连续。

定理 两连续函数的和差积商（分母非零）也连续。

定理 当 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，它的模 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上也连续，有界，取到最大最小值。

（开区域不成立，例：$f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ 在 $|z|<1$ 上连续，但无界。）

例 （1）设 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 存在，则 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内有界；（2）若 $f(z)$ 在 z_0 点连续且不为零， 则 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内不等于零。

证：(1) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)|<A+|f(z)-A|<|A|+\varepsilon.$$

(2) $|f(z)|$ 在 z_0 点也连续，由二元连续函数的保号性, $|f(z)|>0$ 在 z_0 的某邻域成立，结论成立。

第2.2节　解析函数

一．复变函数的导数

定义：设 D 是函数 $w=f(z)$ 的定义域， $z_0\in D$ ，

若极限
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，此极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数，记为

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

或：$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$

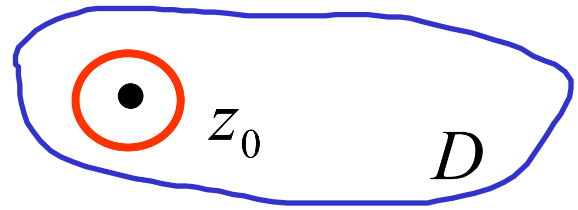
改写为：$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z$

其中： $\alpha(\Delta z)\to 0$, 当$\Delta z\to 0$时。

可导一定连续，反之不成立。

例： $f(z)=|z|$在 $z=0$ 处连续，但不可导。

二. 解析函数



定义： 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内每点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点**解析**。若 $f(z)$ 在区域 D 内每点都解析，则称 $f(z)$ 为 D 内的**解析函数**。

显然，由于 D 是开集，$f(z)$在 D内每点解析等价于 $f(z)$在 D内每点可导。整个复平面上解析的函数称为**整函数**。

若函数在某点解析，则函数在该点可导，反之不成立（见例5）。不解析的点称为**奇点**。

求导四则运算法则

定理 设函数 $f(z)$，$g(z)$ 在区域 D 内解析，则其加减乘除在区域 D 内解析，且

(1) $[af(z)+bg(z)]' = af'(z)+bg'(z)$

(2) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

(3) $[\dfrac{f(z)}{g(z)}]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z)\neq 0).$

求导链式法则

定理　设函数 $\zeta = g(z)$ 在 D 内解析，$w = f(\zeta)$ 在 G 内解析，且 $g(D) \subseteq G$，则复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{d}{dz} f[g(z)] = f'[g(z)]g'(z).$$

例1. 证明 $f(z)=z^n\ (n\geq 1)$ 在复平面 C 上处处可导，且 $f'(z)=nz^{n-1}\ (n\geq 1)$.

证：
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}(nz^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}\Delta z+\cdots+C_n^n\Delta z^{n-1})$$
$$=nz^{n-1}.$$

例3. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ 在 $C\setminus\{2,3\}$ 上解析。

例2. 讨论 $f(z)=\bar{z}$ 的解析性。

解. $\forall z\in C,$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

沿 $\Delta y=k\Delta x$，令 $\Delta z\to 0,$ 则

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

k 不同，极限值不同，所以 $f(z)$ 在 C 上处处不可导，处处不解析。

第2.3节 解析函数的充分必要条件

函数可导的充分必要条件

定理 设 D 是函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的定义域，$z=x+iy$ 是 D 内一点，则 $f(z)$ 在 z 处可导的充分必要条件是：$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x,y) 处可微且满足柯西-黎曼方程（简称 C-R 条件）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

此时 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

证明：必要性. 设 $f'(z)=a+ib$

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$$
$$=f'(z)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z$$
$$=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\alpha_2)(\Delta x+i\Delta y)$$
$$=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y$$
$$+i(b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y)$$

其中：$\alpha(\Delta z)=\alpha_1+\alpha_2 i\to 0\quad(\Delta z\to 0)$， 因此

$$\begin{cases}\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y\\[2ex] \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y\end{cases}\qquad (o(\rho),(\rho\to 0))$$

由可微的定义得： $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x,y) 可微，且

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -b \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = b \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = a \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

且 $f'(z) = a + ib = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

充分性. 反推，类似，略.

解析函数的充分必要条件

定理. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的**充分必要条件**：$u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内可微且满足 **C-R**条件 .

推论：若 $f'(z)\equiv 0\ in\ D$，则 $f(z)\equiv$常数 $in\ D.$

例2. 讨论 $f(z)=\bar{z}$ 的解析性。

解： $f(z)=\bar{z}=x-iy,$

$\therefore\quad u=x, v=-y.$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

C-R 条件不满足，所以 $f(z)$ 在复平面上处处不可导，处处不解析。

例5. 讨论函数 $w=|z|^2$ 的解析性.

解：$w=|z|^2=x^2+y^2$,

$$\therefore \quad u=x^2+y^2, v\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

易见，C-R条件仅在 $(0,0)$ 处满足。所以 $w=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可导，当 $z\neq 0$ 时不可导；在 复平面上处处不解析。

第2.4节 解析函数与调和函数的关系

定义：如果实函数 $U(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, in\, D$$

则称 $U(x,y)$为 D 内的调和函数。

注：拉普拉斯方程也称为调和方程。

定理 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内均为调和函数。

证：因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内可微（任意阶可微，见下章）且满足柯西-黎曼方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

两式相加得 $\Delta u=0.$ 类似可证 $\Delta v=0.$

注：由上述定理知，解析函数的实部和虚部均为调和函数，且满足柯西 – 黎曼方程，称它们为一对共轭调和函数。当区域是单连通区域时，调和函数的共轭调和函数一定存在，对一般区域结论不成立。

例7. 已知调和函数 $u=y^3-3x^2y$，求其共轭调和函数 v，并求以 u 为实部且满足 $f(0)=i$ 的解析函数。

解：由**C-R** 条件: $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy\cdots\cdots(1)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2\cdots\cdots(2)$$

将（1）对 y 积分得：

$$v(x,y)=\int(-6xy)\,dy=-3xy^2+\varphi(x).$$

代入(2)得：$\varphi'(x)=3x^2 \Rightarrow \varphi(x)=x^3+C$

$$\therefore v(x,y)=-3xy^2+x^3+C.$$

$$f(z)=y^3-3x^2y+\ i(-3xy^2+x^3+C).$$

由条件 $f(0)=i$ 得：$iC=i \Rightarrow C=1$

$$\therefore\ f(z)=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3+1).$$

$$=iz^3+i.$$

第2.5节　初等解析函数

一 指数函数

定义：设 $z=x+iy$，称函数 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 为**指数函数**。

易证 $u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$ 在全复平面上可微且满足 C-R条件，所以 e^z 在复平面上解析(**整函数**)且 $(e^z)'=e^z$.

指数函数的性质：

(1) $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$，特别 $(e^z)^n=e^{nz}$.

(2) $e^z\neq 0,\ \forall z\in C$. 当 $z=x$ 为实数时，

$e^x>1\ (x>0);\ e^x<1\ (x<0).$

(3) e^z 以 $T=2n\pi i$（$n\neq 0$ 整数）为周期，即 $e^{z+T}=e^z$.

(4) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ e^{\pi i}=-1,\ e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i,\ e^{2\pi i}=1.$

(5) $e^z=1\Leftrightarrow z=2n\pi i.$

例. 求 $\exp(e^z)$ 的实部与虚部.

解: $$\exp(e^z) = \exp(e^x \cos y + ie^x \sin y)$$

$$= e^{e^x \cos y}(\cos(e^x \sin y) + i\sin(e^x \sin y)).$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}(\exp(e^z)) = e^{e^x \cos y} \cdot \cos(e^x \sin y)$$

$$\mathrm{Im}(\exp(e^z)) = e^{e^x \cos y} \cdot \sin(e^x \sin y).$$

二　对数函数

定义：对数函数是指数函数的反函数，即 满足方程 $e^w = z \quad (z \neq 0)$ 的反函数 $w = f(z)$ 称为对数函数，记为 $w = Ln\, z,\ z \in C \setminus \{0\}$.

设 $w = u + iv,\ z = |z| e^{iArg\ z}$ 则：

$$e^{u+iv} = |z| e^{iArg\ z} \Rightarrow e^u = |z|, v = Arg\, z$$

$$\therefore\ w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

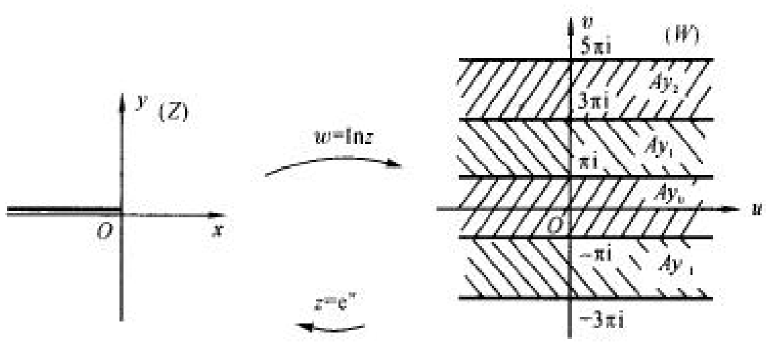
即 $Ln\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

对数函数 $Ln z$ 是多值函数，有无穷个分支， $k=0$ 时的分支称为对数函数的主支，记

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$ ......对数函数主值

$$C\setminus\{0\}\xleftrightarrow{\text{一对一}}\{u+iv\,|\,u\in R,-\pi<v\le\pi\}.$$

显然，$Ln\ z=\ln z+i2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$



例. $Ln\ (1+i)$

$$= \ln|1+i| + i\ Arg\ (1+i)$$

$$= \ln\sqrt{2} + i\ (\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$Ln\ (-1)$

$$= \ln|(-1)| + i\ Arg\ (-1)$$

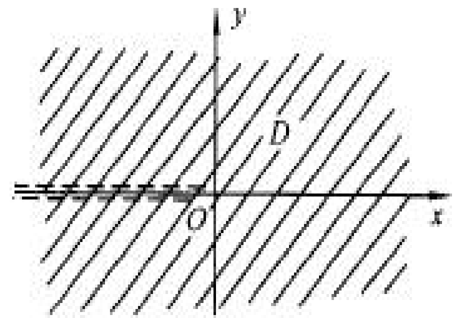
$$= i\ (\pi + 2k\pi) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$\ln[(-1-i)(1-i)] = \ln(-2) = \ln 2 + i\pi$$

对数函数基本性质

$$Ln\ (z_1 z_2) = Ln\ z_1 + Ln\ z_2$$

$$Ln(z_1 / z_2) = Ln\, z_1 - Ln\, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$$



ln z 的解析区域

对数函数的解析性

易见 $\ln|z|$ 在 $C\setminus\{0\}$ 上处处连续，$\arg z$ 在负实轴上不连续 ($\lim\limits_{y\to 0^+} \arg\ z = \pi$, $\lim\limits_{y\to 0^-} \arg z = -\pi$), 因此 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 在 $C\setminus\{x+iy \mid y=0, x\le 0\}$ 上连续。

定理： 对数主支 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

在区域 $D = C\setminus\{x+iy \mid y=0, x\le 0\}$ 上解析，且

$$\boxed{(\ln\ z)' = 1/z.}$$

对数函数求导公式推导

$$(e^{\ln z})' = (z)'$$

$$\Rightarrow e^{\ln z} \cdot (\ln z)' = 1$$

$$\Rightarrow z(\ln z)' = 1$$

$$\Rightarrow (\ln z)' = 1/z.$$

三 幂函数

定义： 设 $z\,(z \neq 0), \mu$ 为复数，称函数 $z^{\mu} = e^{\mu\, Lnz}$ 为**幂函数**。

例： $i^{i} = e^{iLni} = e^{i(\ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1| + i(0 + 2k\pi))} = e^{2k\pi\sqrt{2}i}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

注：设 $n\,(n\geq 1)$ 为正整数，当 $\mu = n$ 时，幂函数为单值函数，即 n 次方幂，$z^n = z\cdot z\cdots z$；

当 $\mu=\dfrac{1}{n}$ 时，幂函数为 n 次方根：

$$
\begin{aligned}
z^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}Lnz} \\
&= e^{\frac{1}{n}\ln|z|}\cdot e^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}i} \\
&= |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}i} \qquad (k=0,1,2,\cdots n-1). \\
&= \sqrt[n]{z}.
\end{aligned}
$$

幂函数求导公式： $(z^{\mu})' = \mu z^{\mu-1}$

证： $(z^{\mu})' = (e^{\mu \, Lnz})'$

$$= e^{\mu \, Lnz} \cdot \frac{\mu}{z}$$

$$= \mu z^{\mu-1},$$

$$\forall \, z \in C \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}.$$

四　三角函数和双曲函数

定义：对任意复数 z，定义三角函数和双曲函数：

正弦函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

余弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

双曲正弦

$$sh\ z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

双曲余弦

$$ch\ z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

基本性质

	周期性	奇偶性	导数公式（整函数）
$\sin z$	2π	奇	$(\sin z)' = \cos z$
$\cos z$	2π	偶	$(\cos z)' = -\sin z$
$sh\ z$	$2\pi i$	奇	$(shz)' = chz$
$ch\ z$	$2\pi i$	偶	$(chz)' = shz$

在实数域内成立的恒等式 在复数域也成立，如：

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(iz) = ishz \qquad \cos(iz) = chz$$

$$ch(iz) = \cos z \qquad sh(iz) = i\sin z.$$

$\sin z$，$\cos z$ 在复平面上不是有界函数（与实函数不同）

证：$|\sin iy| = \dfrac{|e^{-y} - e^{y}|}{2} \to +\infty \quad (y \to \infty)$，

类似，可证 $\cos z$ 也无界。

例. 解方程 $\sin(iz)=i.$

解: $$\frac{e^{i\cdot iz}-e^{-i\cdot iz}}{2i}=i$$

$$\Rightarrow\ e^{2z}-2e^{z}-1=0$$

$$\Rightarrow\ e^{z}=1\pm\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad z^{(1)}=Ln(1+\sqrt{2})=\ln(1+\sqrt{2})+2k\pi i$$

$$z^{(2)}=Ln(1-\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2}-1)+(2k+1)\pi i$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

补充题

求解方程 $\tan z = 2i$，写出解的实部与虚部。

解：方程即是 $$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-2 \Rightarrow \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=-2 \Rightarrow e^{2iz}-1=-2(e^{2iz}+1)$$

$$\Rightarrow 3e^{2iz}=-1 \quad 2iz=-\ln 3+i\pi(1+2k)$$

所以 $\operatorname{Re} z=\pi(k+0.5)$ $\operatorname{Im} z=\ln\sqrt{3}$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(4) 已知 $f(z)=u+iv$ 是整函数，且 $u=e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)$，求 $f(z)$ 的表达式（用 z 表示，其中 $z=x+iy$）。

解：$u_x=e^x(x\sin y+2\sin y+y\cos y)=v_y \Rightarrow v=e^x(-x\cos y-\cos y+y\sin y)+\phi(x)$

$$v_x=e^x(-x\cos y-2\cos y+y\sin y)+\phi'(x)=-u_y=-e^x(x\cos y+2\cos y-y\sin y)$$

$$\Rightarrow \phi'=0 \Rightarrow \phi=c$$

所以 $f(z)=e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)+ie^x(-x\cos y-\cos y+y\sin y)+ic=-ie^z(z+1-c)$

指出 $f(z)=1-y^2+i(2xy-y^2)$ 在何处可导，何处解析，在可导处求出其导数。

解：$u=1-y^2, v=2xy-y^2$ 处处可微 $\quad u_x=0=v_y=2x-2y \quad \Rightarrow x=y$

$$-u_y=2y=v_x=2y$$

所以 $f(z)$ 在 $x=y$ 处可导，处处不解析，

在 $x=y$ 处 $\quad f'(z)=u_x+iv_x=i2y=i2x$

(1) 给出过原点且与直线 $z=(1+i)t+2 \quad (t\in R)$ 垂直的直线的表达式。

解：所求直线的方向为 $(1+i)e^{i\pi/2}=i(1+i)=-1+i$

直线的表达式为 $z=(-1+i)t \quad t\in R$

(2) 求解方程 $e^{2z}-e^{z}+1-i=0$，写出解的实部与虚部。

解：即 $(e^{z}-1-i)(e^{z}+i)=0 \qquad e^{z}=1+i, \quad e^{z}=-i$

根为 $z_k=\mathrm{Ln}(1+i) \quad \mathrm{Re}\,z_k=\mathrm{Ln}\sqrt{2}$ ，$\mathrm{Im}\,z_k=\pi/4+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

及 $z_k=\mathrm{Ln}(-i) \qquad \mathrm{Re}\,z_k=0$ ，$\mathrm{Im}\,z_k=-\pi/2+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

六、（6分）设函数 f 在区域 D 内解析，且 $\arg f(z)$ 为常数，证明： f 在 D 内为常数。

证明：记 $\arg f(z)=\alpha$，考虑 $g(z)=e^{-i\alpha}f(z)$，则 $\arg g(z)=0 \Rightarrow g(z)\in R$ 且 $g(z)>0$

所以 $\operatorname{Im} g(z)=0$ 由 $C-R$ 方程得 $\operatorname{Re} g(z)=c$

所以 $g(z)$ 为常数 即 $f(z)$ 为常数。

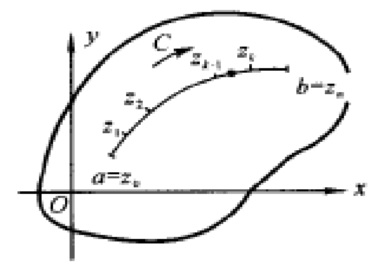
复变函数与拉普拉斯变换

第三章　复变函数的积分

第3.1节　复变函数的积分及其性质

一 复积分的定义及计算

定义：设 C 是复平面上一有向曲线，$f(z)$ 在 C 上有定义。分割曲线 C，分点为 $a=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n=b$，任取 $\xi_k\in z_{k-1}z_k$，作和



$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k,\quad (\Delta z_k=z_k-z_{k-1})$$

若令 $\sigma=\max\limits_{1\le k\le n}\{|z_{k-1}z_k|\}\to 0$，$S_n$ 都收敛到同一极限，则称函数 $f(z)$ 沿曲线 C 可积，此极限值称为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为：

$$\boxed{\int_C f(z)dz=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k.}$$

注：当曲线 C是区间 $a \le x \le b$ 而 $f(z)=u(x)$ 时，复积分为实函数的定积分。

例　设 C是连接复数点 a, b的任意曲线，用定义计算积分 $\int_C dz.$

解：$$\int_C dz = \lim_{\sigma \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (z_k - z_{k-1})$$

$$= \lim_{\sigma \to 0} (b-a) = b-a.$$

一般而言，大多积分用定义难以计算。

复积分与曲线积分的关系

定理 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在曲线 C上连续，则 $f(z)$ 在C 上可积，且

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

证： $\displaystyle\int_C f(z)dz=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k,$

$$=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k)+iv(\xi_k))(\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n}[(u(\xi_k)\Delta x_k-v(\xi_k)\Delta y_k)+i(v(\xi_k)\Delta x_k+u(\xi_k)\Delta y_k)]$$

$$=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy.$$

复积分的计算方法

设曲线 C 的参数方程：$z = z(t) = x(t) + iy(t),$

（$\alpha \le t \le \beta$） 满足 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$，则

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt}$$

$$\left(= \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\,](x'(t) + iy'(t))\,dt. \right)$$

证：由复积分与曲线积分的关系及曲线积分的计算方法可得。

例2. 验证

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1\,(\text{整数}). \end{cases}$$

其中 C 是以 a 为中心，R 为半径的正向圆周曲线。

解： $C: z = z(t) = \mathrm{Re}^{it} + a, (0 \leq t \leq 2\pi).$

$$\therefore \oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n e^{\mathrm{int}}} Rie^{it}dt$$

$$= \frac{i}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{(1-n)it}dt = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1\,(\text{整数}). \end{cases}$$

二　复积分的性质

(1) $\int_C (k_1 f(z)+k_2 g(z))dz = k_1\int_C f(z)dz + k_2\int_C g(z)dz.$

(2) 设曲线 $C=C_1+C_2$，其中 C_1 的终点为 C_2 的起点，则 $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$

(3) 记 C^- 是有向曲线 C 的反向曲线，则：

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

(4) 设 l 为曲线 C 的长度，$|f(z)|\le M, \forall\, z\in C$，

则：$|\int_C f(z)dz| \le \int_C |f(z)|\,ds \le Ml.$

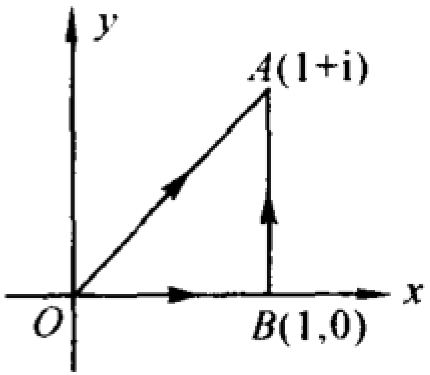
证：用积分定义易证，略。

例4. 计算积分 $\int_C \operatorname{Re} z dz$, 其中 C 是连接 O 与 A 的曲线，路径见图3-2：

(1) 直线段 OA; (2) 折线段 OB 与 BA.

解：(1) $OA: z = t + it, t: 0 \to 1$

$$\therefore \int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1+i}{2}.$$



(2) $OB: z = t, t: 0 \to 1;$

$BA: \quad z = 1 + it, t: 0 \to 1.$

$$\therefore \int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{OB} \operatorname{Re} z dz + \int_{BA} \operatorname{Re} z dz$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 i dt = \frac{1}{2} + i.$$

(注：说明复积分一般与路径有关)

第3.2节　柯西积分定理

定理（柯西积分定理） 设函数 $f(z)$ 在封闭曲线 C 上及其所包围的单连通区域 D 内解析，则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证： $\oint_C f(z)dz$　（不妨设 C 正向）

$$= \oint_C udx - vdy + i(vdx + udy) \quad \text{(Th3.1.1)}$$

$$= \iint_D [-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}]dxdy + i\iint_D [\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}]dxdy \ \text{（格林公式）}$$

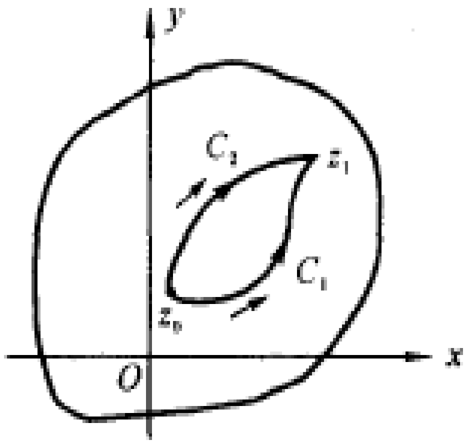
$= 0.$（$C-R$条件）

推论1. 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则积分 $\int_C f(z)dz$ 与路径无关，只与 C 的起点终点有关。

证： 设 C_1, C_2 是 D 内任意两条起点为 z_0，终点为 z_1 的曲线，由柯西积分定理

$$\oint_{C_1+C_2^-} f(z)dz = 0$$

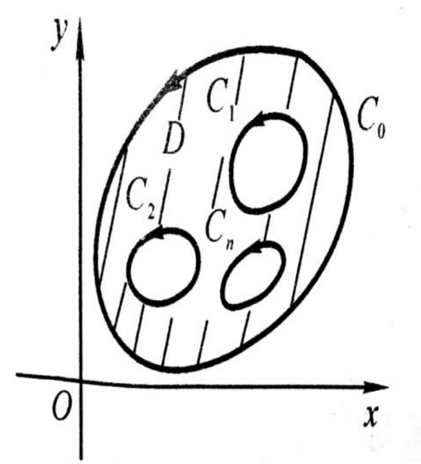
$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$



推论2. （多连通区域 D的柯西积分定理）设函数 $f(z)$ 在多连通区域 D及其正向边界 C上解析，则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证：与单连通情况一样可证，略。



如右图，设 D 的正向边界

$$C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-,$$

则：$$\boxed{\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz.}$$

特别, $n=1$ 时， $\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz.$ （形变公式）

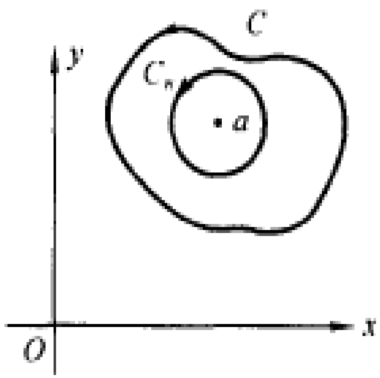
例5 计算 $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz$, C为光滑闭曲线，a 不在 C上，n为整数。

解： 当 a 在C所围区域 D 的外部时，由柯西积分定理：$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0$;

当 a 在 C所围区域 D的内部时，由形变公式：

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \oint_{|z-a|=R} \frac{1}{(z-a)^n} dz$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1\text{(整数)}. \end{cases}$$



二. 原函数定理

若 $f(z)$ 在单连通区域 D内解析，积分与路径无关。

记

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \qquad (z\in D)$$ （积分上限函数）

其中 z_0 为积分曲线 γ 的起点，z为终点， $\gamma\subset D.$

定理 若$f(z)$ 在单连通区域 D内解析，则 $F(z)$ 在 D 内也解析，且

$$F'(z)=f(z).$$

证： 因为 $f(z)$ 在 D 内连续，对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$

当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，有 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon.$

$$\therefore\quad \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$ （当 $|\Delta z|<\delta$ 时）

推论1. 设 $G(z)$ 也是 $f(z)$ 的原函数（$G'(z)=f(z)$），则：

$$G(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta+C \quad (C\text{常数}).$$

推论2. 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，$G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则：

$$\int_C f(z)dz=G(z_1)-G(z_0)$$

其中曲线 $C\subset D$，z_0,z_1 是 C 的起点和终点。

证： $G(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta+C$

取 $z=z_0$得： $C=G(z_0)$

$$\therefore \quad \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=G(z)-G(z_0)$$

再取 $z=z_1$ 即可得证。

例7. 计算 $\int_C \frac{dz}{z}$，其中 C 是连接 $1+i$ 与 $2i$ 的直线段。

解：在 $D=\{re^{i\theta}:0<r<+\infty,-\pi<\theta<\pi\}$ 中，有

$(\ln z)'=\frac{1}{z}$ 解析，且 $C\subset D,$

$$\therefore \quad \int_C \frac{dz}{z}=\ln z\,\Big|_{1+i}^{2i}=\ln 2i-\ln(1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i.$$

（**注**：也可用参数方程直接计算）

第3.3节　柯西积分公式

定理　（柯西积分公式）设 函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，$C=\partial D$ 正向，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz,\quad \forall z_0\in D.$$

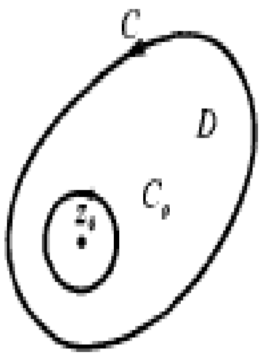
注:（1）D 为单连通或多连通区域，定理都成立。

（2）当 $z_0\notin\overline{D}$ 时，$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=0.$

证：因为 $f(z)$ 在z_0连续，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$

记 $C_\rho:|z-z_0|=\rho\in(0,\delta)$ 逆时针。由柯西积分定理



$$\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\oint_{C_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz+f(z_0)\oint_{C_\rho}\frac{1}{z-z_0}dz$$

由例2，$f(z_0)\oint_{C_\rho}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$

$$\left|\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$$

$$\leq\oint_{C_\rho}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds\leq\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知：

$$\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=0.$$

$$\therefore\quad\oint_{C}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)\Rightarrow \text{结论}.$$

解析函数的积分平均值定理

定理： 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R$ 上解析，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta.$$

证： 在柯西积分公式中，取 $C=C_R:|z-z_0|=R$ 逆时针，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta.$$

例9. 计算 $\oint_C \frac{e^z+z}{z-2}dz$, 其中 C:

（1）单位圆周，逆时针；

（2）中心在原点，半径为 3 的圆周曲线，逆时针。

解: (1) $\frac{e^z+z}{z-2}$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，由柯西积分定理

$$\oint_C \frac{e^z+z}{z-2}dz = 0.$$

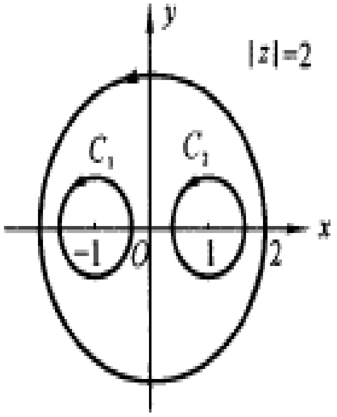
（2）应用柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z+z}{z-2}dz = 2\pi i(e^z+z)|_{z=2} = 2\pi i(e^2+2).$$

例 10. 求积分 $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz.$

解一：$I=\frac{1}{2}[\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z-1}dz-\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z+1}dz]$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i[(\sin z)|_{z=1}-(\sin z)|_{z=-1}]=2\pi i\sin 1.$$



解二：$I=\oint\limits_{|z+1|=1/2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz+\oint\limits_{|z-1|=1/2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz.$

$$=\oint\limits_{|z+1|=1/2}\frac{\sin z/(z-1)}{z+1}dz+\oint\limits_{|z-1|=1/2}\frac{\sin z/(z+1)}{z-1}dz.$$

$$=2\pi i[\frac{\sin z}{z-1}|_{z=-1}+\frac{\sin z}{z+1}|_{z=1}]=2\pi i\sin 1.$$

第3.4　解析函数的无穷可微性

定理（高阶导数的柯西积分公式）设 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，$C=\partial D$ 正向，则 $f(z)$ 在 D 内的任意阶导数存在，且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad \forall z_0\in D.\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

证:略，P74。形式上，在柯西积分公式两边对变量 z_0 求 n 阶导数可得。

注：实函数不具有此性质。

例11. 计算 $\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, 其中 C 是绕 i 一周的闭曲线。

解：$\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''|_{z=i} = \pi i \cos(z+2\cdot\frac{\pi}{2})|_{z=i} = -\pi i ch1.$

例13. 计算 $I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz$, $C:|z|=r>1$ 逆时针。

解：
$$I = \oint_{|z-1|<\delta} \frac{e^z/(z+1)^2}{(z-1)^2}dz + \oint_{|z+1|<\delta} \frac{e^z/(z-1)^2}{(z+1)^2}dz$$

$$= 2\pi i[(\frac{e^z}{(z+1)^2})'|_{z=1} + (\frac{e^z}{(z-1)^2})'|_{z=-1}] = \frac{\pi}{e}i.$$

其中：$\delta < \min\{1, r-1\}.$

定理(柯西不等式) 设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R$ 上解析，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!}{R^n}M,$$

其中：$M=\max\limits_{|z-z_0|=R}|f(z)|.$

证： $|f^{(n)}(z_0)|=|\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz|$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!}{R^n}M.$$

定理（柳维尔定理）有界整函数必为常数。

证：设 $f(z)$ 在复平面 C 上解析，且 $|f(z)|\le M, z\in C.$

由柯西不等式，$\forall z_0\in C,$ 有

$$|f'(z_0)|\le \frac{M}{R}\to 0,\quad (R\to +\infty).$$

$\therefore\quad f'(z)\equiv 0$，$z\in C\Rightarrow f(z)\equiv$ 常数。

注：实函数不具有此性质，如 $\sin x$ 在 R 上有界且任意阶可导，但不是常数。

定理 （代数学基本定理） 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是复常数，$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1, a_n \neq 0$，则至少 $\exists\, z_0 \in C$ 使得 $p(z_0) = 0.$

证:(反证) 设 $p(z) \neq 0, \ \forall z \in C$ ，则 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 是整函数，且 $f(z) \to 0, \ (z \to \infty)$. 因此存在 $R > 0$ 使 $f(z)$ 在 $C \setminus B_R$ 上有界；而 $f(z)$ 在 $\overline{B_R}$ 上连续，有界， 所以 $f(z)$ 在复平面上有界。由 柳维尔定理，$f(z), p(z)$ 是常数，矛盾。

补充题

（6分）设 $f=u+iv$ 是整函数，且当 $x^2+y^2\to\infty$ 时 $u\to 0$，证明：$u\equiv 0$。

证明：由 $x^2+y^2\to\infty$ 时 $u\to 0$ 可得 u 有界 即 $\exists M>0$ 使得 $|u|<M$

令 $g=e^f$ 则 g 是整函数，且 $|g|=e^u<e^M$ $\Rightarrow g$ 为常数

即 $g'=f'e^f=0\Rightarrow f'=0$ $\Rightarrow f=c$ $\Rightarrow u$ 为常数

因为 $u\to 0$ 所以 $u\equiv 0$

二、计算积分（每题 8 分，共 16 分）

1）$\oint_c [(z+1)|z| - z\sin(e^z + z^2)]\,dz$，其中积分曲线 C 是：连接 -1 到 1 的直线段，再从 1 由下半单位圆到 -1；

解：$z\sin(e^z + z^2)$ 是整函数　所以 $\oint_c z\sin(e^z + z^2)\,dz = 0$

原积分 $= \oint_c (z+1)|z|\,dz = \int_{-1}^{1}(x+1)|x|\,dx + \int_{c_1}(z+1)|z|\,dz = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^{-1}(z+1)\,dz =$

$= 1 + (z+1)^2/2\Big|_1^{-1} = -1$　　其中 c_1 是从 1 由到 -1 的下半单位圆。

复变函数与拉普拉斯变换

第四章　级数

第4.1节　复数项级数与幂级数

一. 复数列与复数项级数

复数列极限的定义

设$\{z_n\}$是一复数列，z_0是一复数，如果$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N^*$, 当$n \geq N$时，有

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

成立，则称$\{z_n\}$收敛于z_0，记作$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

定理 复数列 $\{z_n\}=\{a_n+ib_n\}$ 收敛于 $z_0=a+ib$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$

证： 由数列极限的定义及下列不等式易证，略。

$$\max\{|a_n-a|,|b_n-b|\}\le|z_n-z_0|\le|a_n-a|+|b_n-b|.$$

复数项级数 **通项**

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

若部分和数列

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \to S \quad (n \to \infty)$$

则称**级数收敛**于 S，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$

若 S_n 不收敛，则称级数**发散**。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>绝对收敛</u>；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>条件收敛。</u>

收敛级数的性质

定理 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛， 则 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$ （级数收敛的必要条件）

定理 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充分必要条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ 都收敛。

定理 绝对收敛的级数一定收敛，反之不成立。

例1. 考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n})$ 的收敛性。

解：因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i}{2^n}$ 绝对收敛，

所以原级数发散。

二 复函数序列 与复函数项级数

$$\{f_n(z)\},\ z \in C$$

和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z),\ z \in D$$ 收敛域

$$\Leftrightarrow S_n(z) = \sum_{n=1}^{n} f_n(z) \to S(z)\ \ (n \to \infty), \quad \forall z \in D$$

部分和序列

三 幂级数的敛散性

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + \cdots + C_n(z-a)^n + \cdots$$

（C_n, a 复数）

特：$a=0$, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$

定理（阿贝尔定理） （i）若 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $z = z_0 \neq 0$ 处收敛，那么当 $|z|<|z_0|$ 时，幂级数绝对收敛。

（ii）若幂级数在 $z=z_1$ 处发散，那么当 $|z|>|z_1|$ 时，幂级数发散。

证:(i) $|C_n z^n| = |C_n z_0^n| |\dfrac{z}{z_0}|^n \leq Mq^n$， $q = |\dfrac{z}{z_0}| < 1.$

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛。(ii)用(i)反证。

收敛半径: $R=\sup\{|z|:\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n \text{ 收敛}\}$

当 $|z|<R$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|z|>R$ 时，幂级数发散；当 $|z|=R$ 时， 不确定。

收敛圆: $B_R=\{z\in C\,||z|<R\}$

当$R=0$ 时，级数仅在 $z=0$ 处收敛；

当 $R=+\infty$ 时，级数在整个复平面收敛。

定理（收敛半径的计算）

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}.$$

例3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

$\because \frac{|z^n|}{n^n} < (\frac{1}{2})^n$ （n 充分大时）

所以级数对任意 z 均收敛。

例4. 讨论级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的敛散性。

解：$S_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \neq 1)$

当 $|z| < 1$ 时，$S_n \to \frac{1}{1-z} \quad (n \to \infty)$.

当 $|z| \geq 1$ 时，z^n 不收敛于零，级数发散。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

幂级数和函数的解析性

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 R,

且 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = f(z), \quad (|z| < R)$

则:(i) $f(z)$ 在 $|z| < R$内解析;

(ii)上式两边可任意阶逐项求导;

(iii) 上式两边可逐项积分，即

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_C z^n dz$$

其中 $C \subset B_R$. 特别，C起点原点，终点 $z \in B_R$,

则 $\int_C z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}.$

第4.2节　台劳（Taylor）级数

一　台劳定理

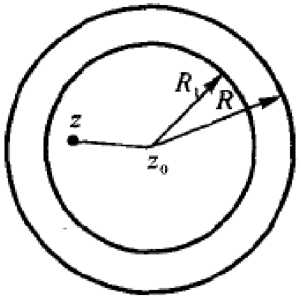
定理（台劳定理 ） 设 $f(z)$ 在圆 $D:|z-z_0|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 在圆内可展开成幂级数（ 台劳级数）

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\quad (|z-z_0|<R)$$

且展开式唯一。

特别：当 $z_0=0$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,(|z|<R)$$ （马克劳林级数）



证： 由柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad C_{R_1}:|\zeta-z_0|=R_1.\quad （|z-z_0|<R_1）$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$\therefore\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

其中：$C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

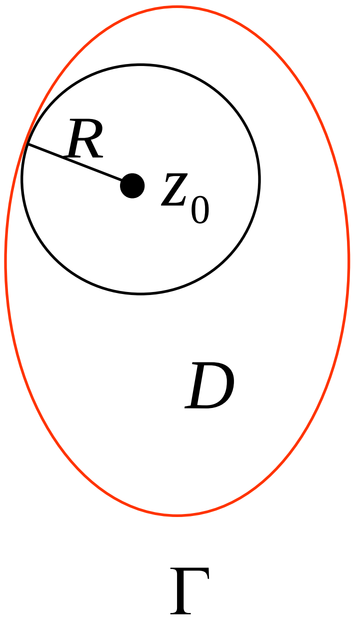
唯一性：若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n'(z-z_0)^n\Rightarrow C_n'=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

推论：$f(z)$ 在区域 D 内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 D 内任一点 z_0 处可展开成幂级数。

z_0处台劳级数的收敛半径

$$R = \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z_0|.$$

其中 Γ 为 D 的边界。



二 一些初等函数的台劳展开式

例6. $f(z)=e^z$ 在复平面上解析，$(e^z)^{(n)}|_{z=0}=1,$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots(|z|<+\infty)$$

例7. $$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n+(-iz)^n}{n!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$(|z|<+\infty)$$

类似

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

$$shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

$$chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

例8. 求函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 的麦克劳林级数。

解： $$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (|z|<1)$$

$$\Rightarrow \int_0^z \frac{1}{1+z}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^z z^n dz \quad (|z|<1)$$

$$\Rightarrow \ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (|z|<1)$$

间接展开法：已有公式，代数运算，变量替换，逐项求导，逐项积分等。

例：由例8， $z\to -z^2$，

$$\ln(1-z^2)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+2}}{n+1} \quad (|z|<1)$$

例9. 将 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在 $z_0=1$ 处展开成台劳级数。

解: $$f(z)=\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{z+1}=1-\frac{1}{(z-1)+2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+(z-1)/2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n},\quad (|z-1|<2).$$

思考题9. 用待定系数法将 $\tan z$ 展开成麦克林级数。

解：设 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots,\ (|z|<\dfrac{\pi}{2})$

则

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots)\cdot(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots)$$

比较系数：$a_0=a_2=a_4=0,\ a_1=1,\ a_3=\dfrac{1}{3},\ a_5=\dfrac{2}{15},\cdots$

$$\therefore\ \tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\cdots\quad(|z|<\frac{\pi}{2}).$$

第4.3节 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

定义1. 若 $f(z_0)=0$，称 z_0 为 $f(z)$ 的零点。

定义2. 若 $f(z_0)=0$，且 $f(z)\neq 0, \forall z\in D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$，称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点。

定义3. 若解析函数 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z),\quad z\in D(z_0,\delta)$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\psi(z_0)\neq 0, m\geq 1$，称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点。（当 $m=1$ 时，称 z_0 为单零点）

定理4.3.1 设 $f(z)$ 在区域 D内解析，$\{z_n\}$两两不同，$f(z_n)=0, \quad z_n \to z_0 \in D\,(n\to\infty)$，则 $f(z)\equiv 0 \; in \; D.$

证： 存在 $r>0$ 使 $D(z_0,r)\subset D$ 。由台劳定理

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \qquad z\in D(z_0,r)$$

先证 $C_n=0\;(n=0,1,2,\cdots).$ （反证）若不然，存在某 $k\geq 0$ 使 $C_0=C_1=\cdots=C_{k-1}=0, C_k\neq 0$， 即有

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

$$=(z-z_0)^k[C_k+C_{k+1}(z-z_0)+\cdots]=(z-z_0)^k\psi(z),$$

其中 $\psi(z_0)=C_k\neq 0$，由连续性，在某 $D(z_0,\delta)$中，$\psi(z)\neq 0$，$f(z)$ 仅有 z_0一个零点，与假设矛盾。

$$\therefore \quad f(z) \equiv 0, \quad z \in D(z_0, r).$$

对任意 $z' \in D$，存在 D 内连接 z', z_0 的折线 Γ，$\delta > 0$ 及 Γ 上的点 $z_0 = s_0, s_1, \cdots, s_m = z'$ 使

$$D(s_j, \delta) \subset D, \text{且 } s_{j+1} \in D(s_j, \delta).\ (0 \le j \le m)$$

因为 $f(z) \equiv 0, \quad z \in D(z_0, \delta) \cap D(s_1, \delta)$，由上讨论知：$f(z) \equiv 0, \quad z \in D(s_1, \delta)$. 依次类推，得

$$f(z) \equiv 0, \quad z \in D(s_j, \delta)\ (0 \le j \le m)$$

因此，$f(z') = 0$. 即证得 $f(z) \equiv 0 \ in\ D.$

推论1. 不恒为零的解析函数的零点必是孤立的。

注： 实函数不具有此性质。例如下列函数处处可导

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$x_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0\,(n\to\infty)$ 都是其零点。$x=0$ 非孤立零点。

推论2. 设 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析，$\{z_n\}$ 两两不同，$f(z_n)=g(z_n),\quad z_n\to z_0\in D\,(n\to\infty)$ ，则

$$f(z)\equiv g(z)\quad in\ D.$$

（解析函数的唯一性定理）

注：由推论2知，两解析函数在区域 D 内一部分上（如实数区间）相等，则他们恒等。

如： $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ 两边都是解析函数，且等式在实轴上成立，由推论2，它在整个复平面成立。

定理4.3.2 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是：$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

证：必要性，由台劳公式，

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

$$=(z-z_0)^m\left(\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,$$

$$f^{(m)}(z_0)=m!\psi(z_0)\neq 0.$$

充分性　　由台劳公式

$$f(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right]$$

$$\overset{\text{记}}{=}(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z_0)\neq 0,\psi(z)$ 解析。结论成立。

例10 讨论 $f(z)=1-\cos z$ 在原点 $z=0$ 的性质。

解：因为

$$f(0)=0,\ f'(0)=\sin z|_{z=0}=0,\ f''(0)=\cos z|_{z=0}=1\neq 0$$

或 $f(z)=1-\cos z$

$$=1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots)$$

$$=z^2(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}+\cdots)$$

所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的二级零点。

第4.4节 罗朗级数

问题： 若 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，z_0 是**孤立奇点**，那么 $f(z)$ 在此去心邻域内是否可展开成幂级数？

1. 双边级数的收敛性

双边级数： $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$

$$=\cdots+C_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{-1} \text{（负幂部分）}$$

$$+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots \text{（正幂部分）}$$

令 $\zeta=(z-z_0)^{-1}$，则负幂部分

$$\cdots+C_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$=\cdots+C_{-n}\zeta^{n}+\cdots+C_{-1}\zeta$$

设其收敛圆为 $|\zeta|<R$，即 $|z-z_0|>\frac{1}{R}=R_1.$

再设正幂级数的收敛圆为 $|z-z_0|<R_2.$

综上， 双边级数收敛的充要条件是 $R_1<R_2$

且收敛域为圆环 $(0\le)\, R_1<|z-z_0|<R_2\, (\le+\infty).$

和函数在圆环内解析，可逐项求导，逐项积分。

2. 罗朗定理

反之，在圆环内解析的函数是否可以展开成双边级数？是！即有

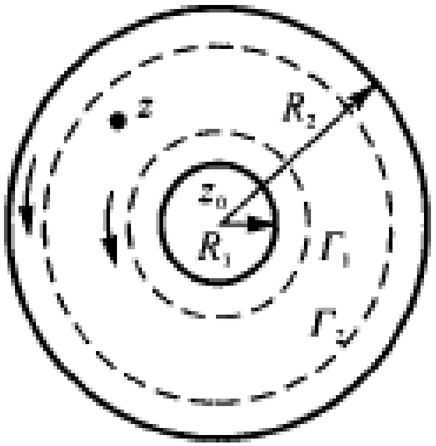
定理（罗朗定理） 设 $f(z)$ 在圆环 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 在此环内可展开成罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

其中：$C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$C_R : |z - z_0| = R \in (R_1, R_2)$ 逆时针，且展开式唯一。

证：如右图作 $\Gamma_1\ \Gamma_2$，由柯西积分公式



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2+\Gamma_1^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta \qquad (1)$$

由台劳定理证明可知：$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$， (2)

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad \text{(形变原理)}.$$

对任一$\zeta\in\Gamma_1$　有

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta$$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-n-1}d\zeta\cdot(z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n(z-z_0)^n,\qquad (3)$$

将(2) (3) 代入（1），定理证毕。

注1. 如果 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R_2$ 解析，则

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}0,\text{当 } n\le -1\text{ 时};\\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\text{当 } n\ge 0\text{ 时}.\end{cases}$$

罗朗定理 $\Rightarrow$ 台劳定理

注2. C_n 用积分公式难以求出，常用麦克劳林公式间接展开（代数运算，变量替换，逐项求导，逐项积分等）。

注3. 不同环域，展开式一般不一样。去心邻域为特殊环。

例11. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列环域中罗朗展开。

(1) $\{1<|z|<2\}$.

解： $z_0=0$, 罗朗级数形式为 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n$,

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

（注意：$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1,\ \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$）

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\qquad \{1<|z|<2\}.$$

(2) $\{2<|z|<+\infty\}$. $\left(z_0=0,\quad \left|\frac{2}{z}\right|<1,\ \left|\frac{1}{z}\right|<1 \right)$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

(3) $\{0<|z-1|<1\}$. $(z_0=1)$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1},\quad \{0<|z-1|<1\}.$$

思考： $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 在 $\{0<|z-1|<1\}$ 中如何展开？

例13. 在 $z=1$ 的去心邻域将 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 展开成罗朗级数。

解：令 $\zeta=\dfrac{1}{z-1}$ （变量替换）

$$\because \quad e^{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!}, \quad (|\zeta|<\infty)$$

$$\therefore \quad e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}, \quad (0<|z-1|<+\infty).$$

类似 $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}, \quad (0<|z-1|<+\infty).$$

三、(14分)(1)求函数$\dfrac{1}{z^2-3z+2}$在圆环$\sqrt{2}<|z+i|<\sqrt{5}$展开的罗朗级数。

解：$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+i-2-i}-\frac{1}{z+i-1-i}=-\frac{1}{2+i}\frac{1}{1-\frac{z+i}{2+i}}-\frac{1}{z+i}\frac{1}{1-\frac{1+i}{z+i}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^n}{(2+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z+i)^{n+1}}$$

(2)求$e^z\cos z$在$z_0=0$处展开的台劳级数。

解：$$e^z\cos z=e^z(e^{iz}+e^{-iz})/2=(e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z})/2$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}[(1+i)^k+(1-i)^k]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k2^{k/2}}{k!}[e^{ik\pi/4}+e^{-ik\pi/4}]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k2^{k/2+1}}{k!}\cos\frac{k\pi}{4}$$

三、（**14 分**）（1）求函数 $\frac{z^2-2z-3}{z(z^2+1)(z+2)}$ 在圆环 $1<|z|<2$ 展开的罗朗级数

解：$\frac{z^2-2z-3}{z(z^2+1)(z+2)}=\frac{1}{z}[\frac{1}{z+2}-\frac{2}{z^2+1}]=\frac{1}{z}[\frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2}-\frac{1}{z^2}\frac{2}{1+1/z^2}]$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{-2n-3}$$

（2）求 $\frac{2z}{z^2-1}$ 在 $z_0=i$ 处展开的台劳级数。

解：$\frac{2z}{z^2-1}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-i-(1-i)}+\frac{1}{z-i+1+i}=\frac{1}{i-1}\frac{1}{1-(z-i)/(1-i)}$

$$+\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+(z-i)/(1+i)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{-1}{(1-i)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}](z-i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[-(-1+i)^{n+1}-(1+i)^{n+1}]\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}[(1+i)^{n+1}+(1-i)^{n+1}]\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}}i^{n+3}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[e^{i\pi(n+1)/4}+e^{-i\pi(n+1)/4}]\frac{(z-i)^n}{2^{(n+1)/2}}i^{n+3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}\frac{(z-i)^n}{2^{(n-1)/2}}i^{n+3}$$

复变函数与拉普拉斯变换

第五章　留数

第5.1节　孤立奇点的分类及其性质

一　孤立奇点的分类

定义 如果 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则在某去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，$f(z)$ 可展开成罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n \quad (0<|z-z_0|<\delta)$$

（1）若主部为零，即 $C_n=0\ (n=-1,-2,\cdots)$，称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点；

（2）若主部有有限项：$f(z)=\dfrac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\dfrac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$

$C_{-m}\neq 0$，称 z_0 为 $f(z)$ 的（ m 级 ）极点；$m=1$，单级点；

（3）若主部有无穷多项，称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

例1：$z_0=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点，因为

$$\frac{e^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots\quad(0<|z|<\infty).$$

例2. $z_0=1$，$z_1=2$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的单极点。

因为

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\quad(0<|z-1|<1).$$

例3. $z_0=0$ 是 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ 的本性奇点，因为

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\cdots(0<|z|<\infty).$$

二 孤立奇点的性质

定理 5.1.1 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列命题等价：

(1) z_0 是可去奇点；

(2) $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内有界；

(3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在（$\neq\infty$）；

(4) $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0.$

证：(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) 易证，略。下面证

$(4) \Rightarrow (1)$：

由(4)，$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in (0,1]$，当 $z \in C_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ 时

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \quad (n \geq 1).$$

$$\therefore \quad |C_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_r} |f(\zeta)||\zeta - z_0|^{n-1}|d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot r^{n-1} \cdot 2\pi r \leq \varepsilon \quad (n \geq 1).$$

由 ε 任意性，$C_{-n} = 0 \quad (n \geq 1)$. 所以 z_0 是可去奇点。

定理5.1.2 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是：

$f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$， 其中 $\psi(z)$ 在 z_0 解析，$\psi(z_0)\neq 0.$

证： z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^{n+m}]$$

$$\overset{\text{记}}{=}\frac{1}{(z-z_0)^m}\psi(z)$$

显然 $\psi(z_0)=C_{-m}\neq 0$,， 且 $\psi(z)$ 在 z_0 解析。

推论： z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点

$\Leftrightarrow$ z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点

定理5.1.3 z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty.$

证：z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow$ z_0 是 $1/f(z)$ 的零点

$$\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

除极点外无其它奇点的函数称为**亚纯函数**。由定理5.1.1和5.1.3，得

定理5.1.4 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在，且 $\neq \infty.$

常用如下判别法

设 $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$ ，z_0 分别是 h, g 的 m, n 级零点 ，则

当 $m \geq n$ 时，z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点；

当 $m < n$ 时，z_0 是 $f(z)$ 的 $n-m$ 级极点。

例5 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z(z-1)^2}$，$z=0$ 一级极点，$z=1$ 二级极点。

例7 求 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点，并分类。

解： $$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}$$

易见 $z=0$ 是 $f(z)$ 分子和分母的二级零点，所以 $z=0$ 是的可去奇点； $z=2k\pi i\ \ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是分母的一级零点，不是分子的零点，所以它是一级极点。

例8　证明 $z=0$ 是函数 $f(z)=z^n e^{\frac{1}{z}}$ (n为整数）的本性奇点。

证一：$$f(z)=z^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}z^{-k},\ (0<|z|<+\infty).$$

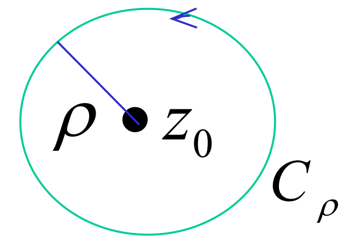
有无穷个负幂项，所以 $z=0$ 是本性奇点。

证二：因为 $$\lim_{z=x\to 0^+} z^n e^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to 0^+} x^n e^{\frac{1}{x}}=+\infty;$$

$$\lim_{z=x\to 0^-} z^n e^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to 0^-} x^n e^{\frac{1}{x}}=0.$$

所以，$\lim\limits_{z\to 0} z^n e^{\frac{1}{z}}$ 不存在，也不是 ∞. 由定理5.1.4知，$z=0$ 是本性奇点。

第5.2节　留数定理



一 留数的定义及留数定理

定义　设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 及 $C_\rho:|z-z_0|=\rho$（逆时针）上解析，则称如下数值为 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz \overset{\text{记}}{=} \operatorname{Res}[f(z);z_0] \quad （\text{或} \quad \operatorname{Res} f(z_0) \quad）$$

注： 由罗朗定理，$\operatorname{Res} f(z_0)$ 为罗朗展开式中 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 项的系数 C_{-1}，且根据形变原理，它与 ρ 无关。

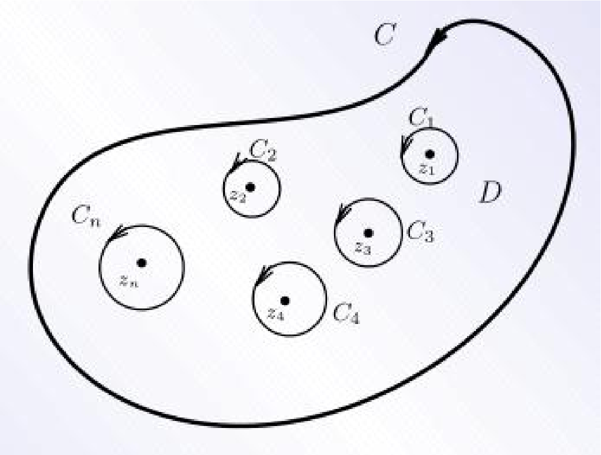
定理（留数定理） 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外解析，C 是 D 内把奇点都包围的闭路，逆时针，则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z); z_k].$$

证：由柯西积分定理及留数定义，知

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z); z_k].$$



其中：$C_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 如右图闭曲线，逆时针。

二. 留数的计算

定理 5.2.2　函数 $f(z)$ 在可去奇点 z_0 处的留数为零（$C_{-1}=0$）。

注：P83，16题，可用留数定理证明。

本性奇点，一般用罗朗展开求 C_{-1}。下面讨论极点处的留数计算。

定理 5.2.3　设 z_0 是 $f(z)$ 的 $m\,(m\geq 1)$ 级极点，则

$$\mathrm{Res}\, f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

特：当 $m=1$ 时，$\mathrm{Res}\, f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$

证：当$0<|z-z_0|<\delta$ 时

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^m f(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^{n+m}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}=(m-1)!C_{-1}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} f(z_0)=C_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

推论 1： 设 $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$， $\psi(z)$ 在 z_0 点解析，$\psi(z_0)\neq 0$

则

$$\operatorname{Res}[\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m};z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\psi^{(m-1)}(z_0).$$

推论2 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，P,Q 在 z_0 解析 ，$P(z_0)\neq 0,$

$Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0,$ z_0 为 $f(z)$ 的单极点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}; z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}; z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

更一般，有如下结果。

推论3. 设 z_0是 $g(z)$的 k 级零点，$h(z)$ 的 $k+1$级零点，则 z_0 是 $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的单极点， 且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};z_0\right]=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}.$$

证：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\dfrac{1}{k!}g^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k+o((z-z_0)^k)}{\dfrac{1}{(k+1)!}h^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)^{k+1}+o((z-z_0)^{k+1})}$$

$$=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}.$$

定理 5.2.4 设 $g(z), h(z)$ 在 z_0 解析，$g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=h'(z_0)=0$, $h''(z_0)\neq 0$，z_0 是 $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的二级极点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)}; z_0\right]=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}.$$

证：

$$\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+\dfrac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots}{\dfrac{h''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dfrac{h'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots}$$

$$=C_{-2}(z-z_0)^{-2}+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+\cdots$$

$$\Rightarrow g(z_0)=C_{-2}\cdot\frac{h''(z_0)}{2!}, g'(z_0)=C_{-2}\cdot\frac{h'''(z_0)}{3!}+C_{-1}\cdot\frac{h''(z_0)}{2!}$$

$$\Rightarrow C_{-1}=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}.$$

例14. 求 $f(z)=\dfrac{z}{1-\cos z}$ 在孤立奇点处的留数。

解： $z_k=2k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是分母的二级零点

所以 $z_k=2k\pi\ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的二级极点，

$z_0=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{2\sin^2\frac{z}{2}}=2.$$

（注：也可用推论3 或 $\cos z$ 的麦克劳林展开计算极限）

由定理 5.2.4（用定理5.2.3也可，计算较复杂）

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2k\pi\right]=2\cdot\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\frac{2k\pi\cdot 0}{1}=2\ (k\neq 0).$$

例 15. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$ 在奇点处的留数。

解： $z=\pm 1$ 是单级点，由推论2

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5};\pm 1\right]=\frac{1}{(z^3-z^5)'}\bigg|_{z=\pm 1}=-\frac{1}{2}.$$

$z=0$ 是3级极点，由定理5.2.3

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5};0\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{1}{z^3-z^5}\right]''=1.$$

或由罗朗展开求 C_{-1} 也可求得：

$$f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{z^3}(1+z^2+z^4+\cdots)$$

$$(0<|z|<1)$$

例18 求函数 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 奇点处留数。

解： $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots)$$

$$\cdot(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots) \qquad (0<|z|<+\infty)$$

$$\therefore \quad \mathrm{Res}\,[e^{z+\frac{1}{z}};0]=C_{-1}$$

$$=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!n!}+\cdots.$$

例19 计算积分 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz.$

解： 在 $|z|<1$ ，被积函数只有 $z=0$ 一个一级极点，

所以

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,[\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3};0]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{z^2\sin z}{(1-e^z)^3}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{z^2(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots)}{(-z-\dfrac{z^2}{2!}-\cdots)^3} = 2\pi i\cdot(-1) = -2\pi i.$$

思考：积分曲线若改为 $|z|=6, |z|=7$ **，情况如何？**

例 21 计算积分 $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}dz.$

解： $$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{9}\left(\frac{e^z}{z^2}-\frac{e^z}{z^2+9}\right)dz.$$

第二项在 $|z|\le 2$ 上解析，由柯西积分定理知其积分为零，所以

$$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{9}\cdot\frac{e^z}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{9}\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2};0\right]=\frac{2\pi i}{9}(e^z)'|_{z=0}=\frac{2\pi i}{9}.$$

注：此题也可用柯西积分公式，而例19不可。

思考：若积分曲线为 $|z|=4$ 呢？

例： 若 $z=0$ 是偶函数 $f(z)$ 的孤立奇点，证明

$$\mathrm{Res}\,[f(z);0]=0.$$

证：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n \quad (0<|z|<\delta)$$

$$=f(-z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(-z)^n$$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}((-1)^n+1)C_n z^n \quad (0<|z|<\delta)$$

即 $\quad C_{2k+1}=0 \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

$$\therefore \ \mathrm{Res}\,[f(z);0]=C_{-1}=0.$$

注：若积分曲线 C 内有非孤立奇点或奇点太多，留数定理不适用，可先在圆环上罗朗展开，再逐项积分。

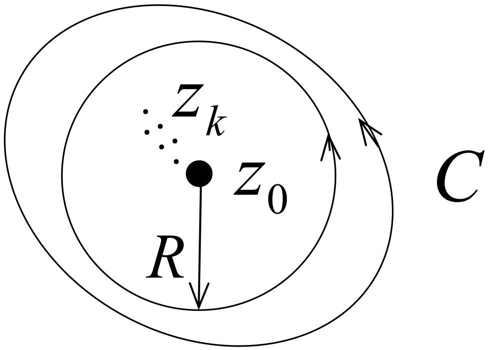
设 $f(z)$ 在区域 $D_R:|z-z_0|\geq R$ 上解析， $C\subset D_R$

则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n,(|z-z_0|>R)$$

$$\therefore \oint_C f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\oint_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^n dz=2\pi i C_{-1}.$$

奇点 $z_k\to z_0\ (k\to\infty).$



第5.3节 留数定理的应用

本节应用留数定理，把几类实积分转化为复积分的计算。

1. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 型积分

定理 5.3.1 设 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 是 $\cos\theta, \sin\theta$ 的有理函数，且在 $[0, 2\pi]$ 上连续，则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum \{f(z)\text{在} |z|<1\text{内极点的留数}\}$$

其中 $f(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}).$

证：令 $z=e^{i\theta}\ (\theta\!: 0\to 2\pi)$. 则 $|z|=1$ 逆时针，且

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2zi}$$

$$\therefore\ \int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{iz}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2zi}\right)dz$$

$$=\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\sum\{f(z)\text{在}\,|\mathrm{z}|<1\text{内极点的留数}\}.$$

例25 计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ 的值。

解： $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$$

被积函数在 $|z|<1$ 内仅有单极点 $z_0=-2+\sqrt{3}$ ，所以

$$I=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+4z+1};-2+\sqrt{3}\right]$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{(z^2+4z+1)'}\Big|_{z=-2+\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 型积分

定理 5.3.2 设 $f(z)$ 在复平面 C 上除有限个奇点外均解析，奇点不在实轴上。如果果 $\exists M>0, R>0$ 使当 $|z|\geq R$ 时，有下式成立

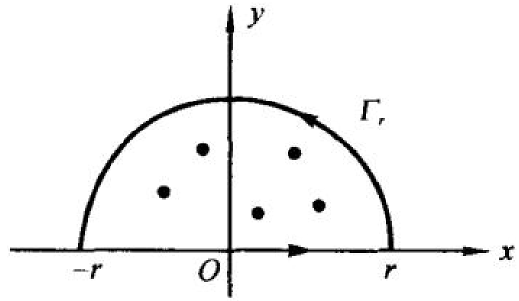
$$|f(z)|\leq \frac{M}{|z|^2} \quad (\text{更一般 } \frac{M}{|z|^\alpha}, \alpha>1)$$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\{f(z)\text{在上半平面 奇点的留数}\}$$

或 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum\{f(z)\text{在下半平面 奇点的留数}\}.$$

证：如图作闭路 $C_r=[-r,r]\cup\Gamma_r$ ，

r 充分大，使奇点都在 C_r 内。



由留数定理，得

$$2\pi i\sum\{f(z)\text{在上半平面奇点的留数}\}$$

$$=\oint_{C_r} f(z)dz=\int_{-r}^{r} f(x)dx+\int_{\Gamma_r} f(z)dz.$$

令 $r\to+\infty$ $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)dx\to\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

且 $$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)dz\right|\le\int_{\Gamma_r}|f(z)|ds\le\frac{M}{r^{\alpha}}\cdot\pi r\to 0.$$

结论得证（若 Γ_r 取下半圆，C_r 逆时针）。

例27. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx.$

解： $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ 在上半平面有单极点 $e^{\frac{\pi}{4}i},e^{\frac{3\pi}{4}i}.$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(\mathrm{Res}\,[\frac{1}{z^4+1};e^{\frac{\pi}{4}i}]+\ \mathrm{Res}\,[\frac{1}{z^4+1};e^{\frac{3\pi}{4}i}])$$

$$=\pi i(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}+\ \frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}})$$

$$=\frac{\pi i}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i+1-i)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx \quad (\alpha > 0)$. **型积分**

定理 5.3.3 设 $f(z)$ 在复平面 C 上除有限个奇点外均解析，奇点不在实轴上。如果 $\exists M > 0, R > 0$，使当 $|z| \geq R$ 时，有下式成立

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (\text{更一般 } \frac{M}{|z|^{\beta-1}}, \beta > 1)$$

则
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx \quad (\alpha > 0)$$
$$= 2\pi i \sum \{f(z)e^{i\alpha z}\text{在上半平面 奇点的留数}\}.$$

(注: $\mathrm{Re}(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \quad \mathrm{Im}(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx$ **)**

证：类似 定理5.3.2的证明

$$2\pi i\sum\{f(z)e^{i\alpha z}\text{在上半平面 奇点的留数}\}$$

$$=\int_{-r}^{r} f(x)e^{i\alpha x}dx+\int_{\Gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}dz.$$

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)e^{i\alpha z}dz\right|=\left|\int_0^{\pi} f(re^{i\theta})e^{i\alpha r(\cos\theta+i\sin\theta)}rie^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\le\frac{M}{r}\cdot r\int_0^{\pi} e^{-\alpha r\sin\theta}d\theta \;=2M\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r\sin\theta}d\theta$$

$$\le 2M\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r\cdot\frac{2\theta}{\pi}}d\theta=\frac{M\pi}{\alpha r}(1-e^{-\alpha r})\to 0\quad (r\to+\infty).$$

结论成立。（注：也可用约当引理证，见书P148）

例28　计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx\ (a>0).$

解：
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$$

$$=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+a^2};ai\right]=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2ai}=\frac{\pi}{a}e^{-a}.$$

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\operatorname{Re}(I)=\frac{\pi}{a}e^{-a}.$$

注：此题不能用定理5.3.2，因 $\cos z$ 无界，定理的增长阶不等式不成立。

(3) 找出函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}\exp\frac{1}{z+1}$ 的孤立奇点，并求出各点的留数。

解： $z=0$ 是二级极点　　$z=-1$ 是本性奇点

$$\mathrm{Res}(f,0)=\left(\exp\frac{1}{z+1}\right)'\Big|_{z=0}=-e$$

在 $0<|z+1|<1$ 内　　$\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(z+1)^n$　　$\exp\frac{1}{z+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^{-k}}{k!}$

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$$

二、计算积分（每题 8 分，共 16 分）

1）$\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{1}{(1-z^2)\sin z} dz$。

解： $z=0, \pm 1$ 是单极点 且在 $|z|=2$ 内

$\mathrm{Res}(f,0)=1 \qquad \mathrm{Res}(f,\pm 1)=-1/2\sin 1$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(1-z^2)\sin z} dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-1)) = 2\pi i(1-1/\sin 1)$$

（2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$。

解：记 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx = I$ 　　则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx = \mathrm{Re}\, I$

而被积函数在上半平面有单极点 $i, \quad -1+i$

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{-1}}{2i(i^2+2i+2)} = \frac{e^{-1}}{2i(1+2i)} \qquad \mathrm{Res}(f,1+i) = \frac{e^{-1-i}}{2i(1-2i)}$$

所以 $I = \dfrac{\pi}{e}\left[\dfrac{1}{(1+2i)} + \dfrac{1}{(1-2i)e^i}\right] = \dfrac{\pi}{5e}[1-2i+(1+2i)(\cos 1 + i\sin 1)]$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx = \mathrm{Re}\, I = \frac{\pi}{5e}[1+\cos 1 - 2\sin 1]$

（3）找出函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}\exp\frac{1}{z}$ 的孤立奇点，并求出各点的留数

解：$f(z)$ 有单极点$\pm i$，本性奇点 0

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{(z^2+1)'}\exp\frac{1}{z}\Big|_{z=i}=\frac{1}{2i}\exp(-i)=-(\sin 1+i\cos 1)/2$$

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\frac{1}{(z^2+1)'}\exp\frac{1}{z}\Big|_{z=-i}=\frac{1}{-2i}\exp(i)=(-\sin 1+i\cos 1)/2$$

在区域$0<|z|<1$ $\quad f(z)=\frac{1}{z^2+1}\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{-n}}{k!}$

$$\mathrm{Res}(f,0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sin 1$$

(2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{(1+z^2)(\cos z-1)}dz$;

解：被积函数在$|z|=2$内有单极点　$\pm i, 0$

$$\mathrm{Res}(f,\pm i)=\frac{1}{2(\cos i-1)}=\frac{1}{2(ch1-1)} \qquad \mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{z\times z}{(1+z^2)(\cos z-1)}=-2$$

原积分$=2\pi i[\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)+\mathrm{Res}(f,0)]=2\pi i(\frac{1}{ch1-1}-2)$

复变函数与拉普拉斯变换

第六章 保角映射

第二章中已指出，复变函数可以视为复平面到复平面的映射。本章从导数的几何意义引出保角映射的概念，并介绍几个初等函数的保角映射，分式线性映射。研究映射的几何意义。

第6.1节 保角映射的概念

1. 导数的几何意义

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，$f'(z_0)\neq 0, z_0\in D$

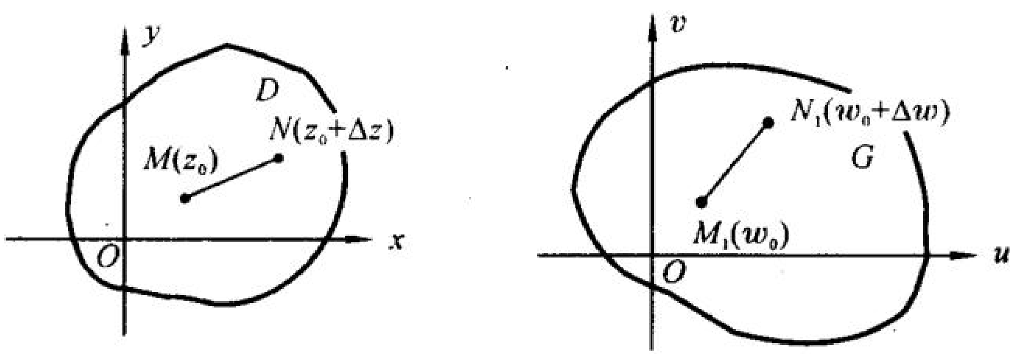
考察 $f'(z_0)$ 的几何意义。下面分别考虑 $|f'(z_0)|$ 和 $Arg\, f'(z_0)$ 的几何意义。

如图6-1，映射 $w=f(z)$：$z_0 \to w_0$，$z_0+\Delta z \to w_0+\Delta w$

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \approx \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

即 $|\Delta w| \approx |f'(z_0)||\Delta z|$（当 $|\Delta z|$很小时）

所以映射 $w=f(z)$ 将 z_0 处很小的线段伸缩了 $|f'(z_0)|$ 倍，称 $|f'(z_0)|$ 为映射 $w=f(z)$ 在 z_0 处的伸缩率。



如图6-2，过 z_0 作曲线 C_1, C_2，其象 Γ_1, Γ_2

$N(z_0+\Delta z)\in C_1$，则 $Arg\,\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=Arg\,\Delta w-Arg\,\Delta z.$

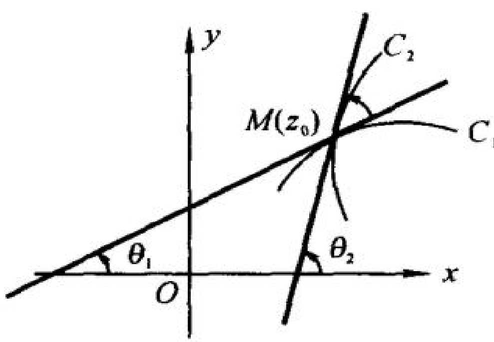
令 $N\to M$，得 $Arg\,f'(z_0)=\varphi_1-\theta_1 \Rightarrow \varphi_1=Arg\,f'(z_0)+\theta_1$

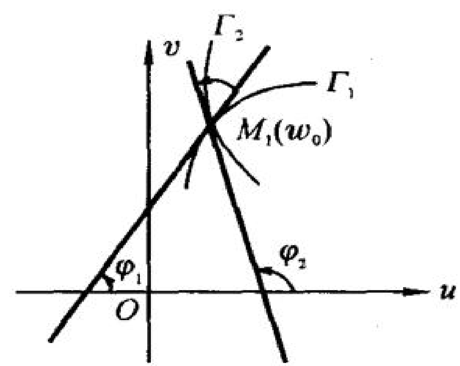
表明 C_1 在 M 处切线旋转 $Arg\,f'(z_0)$ 后与象的切线平行，

称 $Arg\,f'(z_0)$ 为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的旋转角。

同理，$Arg\,f'(z_0)=\varphi_2-\theta_2 \quad \therefore \quad \varphi_2-\varphi_1=\theta_2-\theta_1$

说明：经过映射后，曲线间夹角的大小方向不变（保角性）。





2. 保角映射的概念及几个一般性定理

定义 6.1.1 设 $f(z)$是区域 D到区域 G的双射，且在 D 内每一点有保角性质，则称 $f(z)$是 D 到 G的保角映射（共形映射）。若 $f(z)$在 D内任一点的某邻域是保角的，则称 $f(z)$ 在D 内是局部保角映射。

（$\Leftarrow f'(z)\neq 0$）

保角映射的逆映射及复合映射仍是保角映射。

定理 6.1.4（黎曼映射定理） 设 D,G 是不同于复平面 C 的单连通区域，任取 $z_0 \in D, w_0 \in G, \alpha \in (-\pi, \pi]$，则存在唯一从 D 到 G 的保角映射 $w = f(z)$ 使得

$$w_0 = f(z_0), \arg f'(z_0) = \alpha.$$

定理 6.1.5（边界对应原理） 设简单闭曲线 Γ, Γ' 围成的区域 D, D'，则 D 到 D' 的保角映射 $w = f(z)$ 可以延拓为 $D \cup \Gamma$ 到 $D' \cup \Gamma'$ 的连续双射，且将 Γ 的正向映为 Γ' 的正向。

例 1 区域 $A=\{z:\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)>1,\mathrm{Re}\,z>0,\mathrm{Im}\,z>0\}$

在 $w=z^2$ 映射下的象区域是什么？

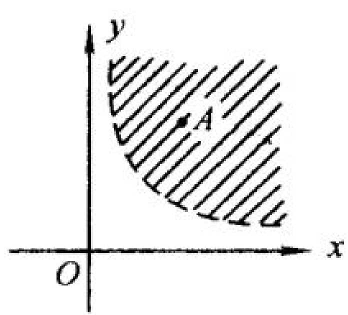
解一：记 $z=x+iy, w=u+iv.$

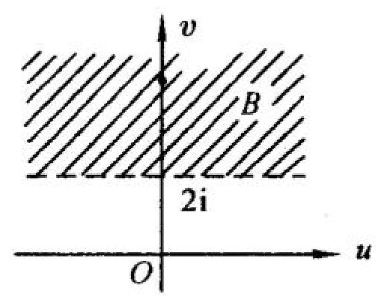
$$u+iv=(x+iy)^2\Rightarrow u=x^2-y^2, v=2xy$$

A 的边界 $xy=1\,(x>0, y>0)\xrightarrow{w} v=2.$

$2+2i\in A\xrightarrow{w}8i$

由边界对应原理，A 的象区域是 $B=\{w:\mathrm{Im}\,w>2\}.$





例 1 区域 $A=\{z:\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Im}(z)>1, \operatorname{Re}z>0, \operatorname{Im}z>0\}$

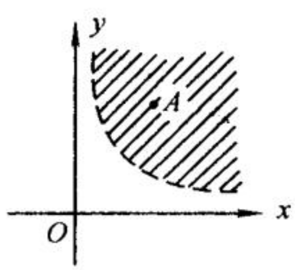
在 $w=z^2$ 映射下的象区域是什么？

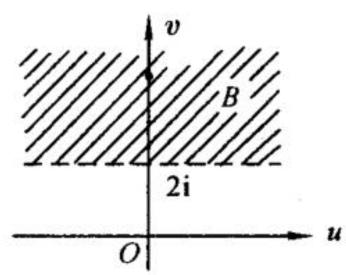
解二：记 $z=x+iy, w=u+iv.$

$$A=\{x+iy: xy>1, x>0, y>0\}$$

$$u+iv=(x+iy)^2 \Rightarrow u=x^2-y^2, v=2xy>2$$

所以 $A\xrightarrow{w}B=\{u+iv: v>2\}.$ （坐标变换法）





第6.2节 若干初等函数所确定的映射

1. 整线性映射 $w = az + b$ （ $a \neq 0, b$ 常数）

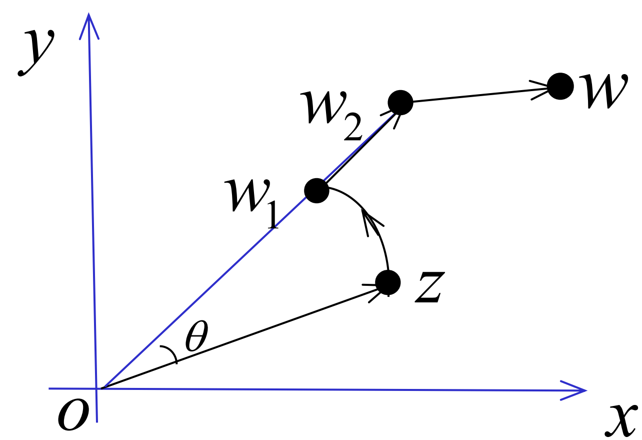
$w' = a \neq 0$, w 保角映射。记 $a = re^{i\theta}$ 则

$w = re^{i\theta}z + b$ 可分解为如下三映射的复合：

（1） $w_1 = e^{i\theta}z$ （旋转映射）

（2） $w_2 = rw_1$ （相似映射）

（3） $w = w_2 + b$ （平移映射）

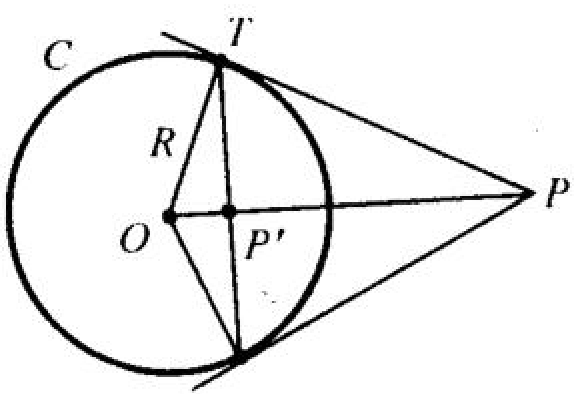


整线性映射把Z平面上圆周曲线映为W平面上的圆周曲线（保圆性）

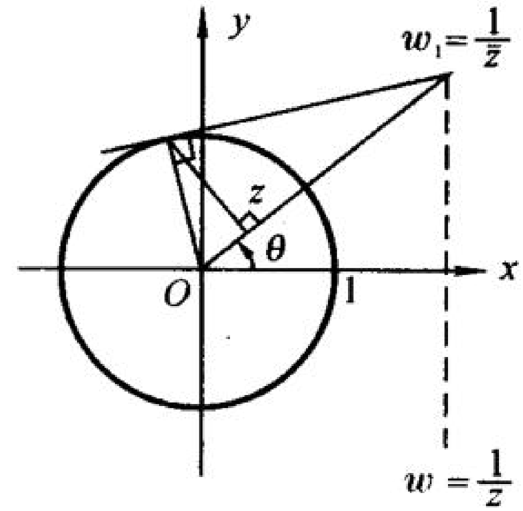
2. 倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$

$$w'=-\frac{1}{z^2}\neq 0\ \ (z\neq 0)$$ 映射除原点外处处保角。

定义6.2.1　如图 6-8，称两点 P 和 P' 关于圆周曲线 $C:|z|=R$ 对称。O,P,P' 共线，且 $|OP|\cdot|OP'|=R^2$.



倒数映射的几何意义



$w=\dfrac{1}{z}$ 由 $w_1=\dfrac{1}{\bar z}$, $w=\overline{w_1}$ 合成。

w_1 是 z 关于单位圆周的对称点；

w 是 w_1关于实轴的对称点，见图6-9。

规定：$0\xleftrightarrow{w=\frac{1}{z}}\infty$

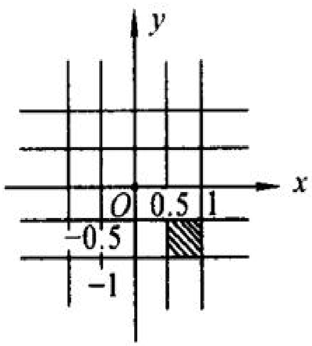
倒数映射是扩充复平面到扩充复平面间的一对一映射。

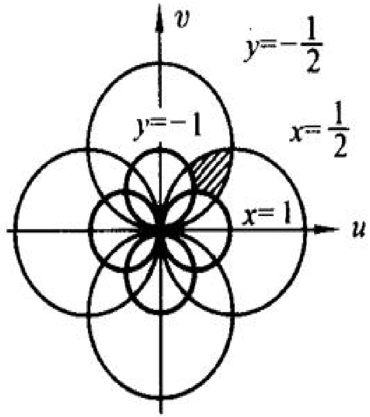
倒数映射 $w=\frac{1}{z}$ 的保圆性

记 $z=x+iy,\ w=u+iv$

$$x+iy=\frac{1}{u+iv}$$

$$\Rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}.$$





易见， $w=\frac{1}{z}$ 把 **Z** 平面上的正交直线网 $x=C_1\neq 0;$ $y=C_2\neq 0$ 映射成 **W** 平面上的正交圆族（图6-10）

$$C_1(u^2+v^2)-u=0;\quad C_2(u^2+v^2)+v=0.$$

其逆也成立。

倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 映广义圆（直线或圆）为广义圆：

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0\text{（当}A=0,\text{ 直线）}$$

$$\xrightarrow{w} D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0.$$

上面性质称为保圆性。

结合几何意义，$w=\dfrac{1}{z}$ 还具有保对称性：

把广义圆周的对称点映为其象的对称点。

3. 幂函数映射

$w = z^n \quad (n \geq 2$ 整数$)$

$w' = nz^{n-1} \neq 0, z \neq 0.$

幂函数映射有局部保角性。

幂函数的逆映射为根式函数

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i} \quad (k = 1, 2, \cdots n-1).$$

固定 k，一对一的映射；$k=0$ 的单值分支

称为 $\sqrt[n]{z}$ 的主支。

幂映射 $w=z^n$ 有如下几何性质：

记 $z=re^{i\theta}, w=\rho e^{i\varphi}$，则 $\rho=r^n, \varphi=n\theta.$

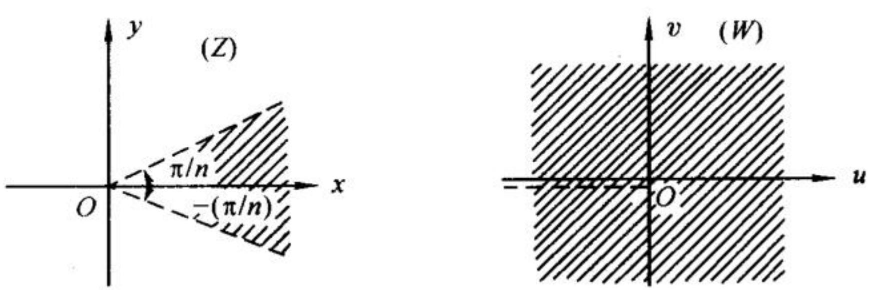
圆 $|z|=r_0 \xrightarrow{w}$ 圆 $|w|=r_0^n$

射线 $\theta=\theta_0 \xrightarrow{w}$ 射线 $\varphi=n\theta_0$

角域 $D=\{(r,\theta): 0<r<+\infty, 0<\theta<\theta_0<\dfrac{2\pi}{n}\}$

$\xrightarrow{w}$ 角域 $D'=\{(\rho,\varphi): 0<\rho<+\infty, 0<\varphi<n\theta_0\}.$

例：



4. 指数函数与对数函数映射

指数函数 $w=e^z$

$w'=e^z\neq 0$ 全平面保角的。

记 $z=x+iy,\ w=\rho e^{i\varphi}$ 则

$$e^{x+iy}=\rho e^{i\varphi}\Rightarrow \rho=e^x,\varphi=y.$$

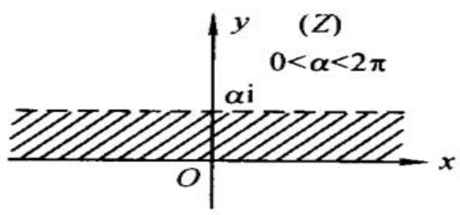
直线 $x=x_0\xrightarrow{w}$ 圆周 $|w|=e^{x_0}$

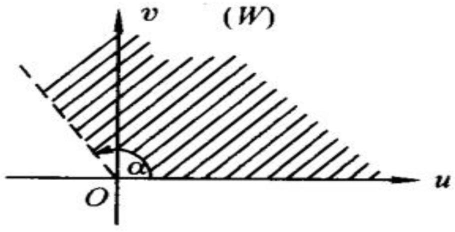
$y=y_0\xrightarrow{w}$ 射线 $\varphi=y_0.$

$$w=e^{z} \qquad e^{x+iy}=\rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho=e^{x}, \varphi=y.$$

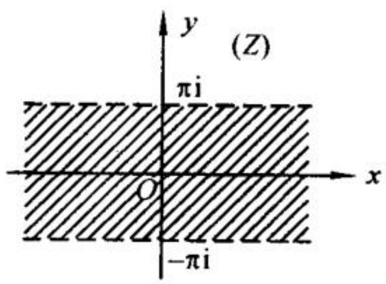
水平带域 $D=\{z \mid 0<\operatorname{Im} z<\alpha<2\pi\}$

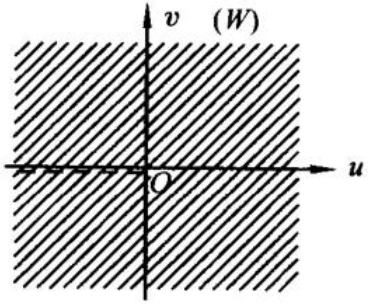
$$\xrightarrow{w} D'=\{w \mid 0<\arg w<\alpha\}$$ 角域





特别 $\{z \mid -\pi<\operatorname{Im} z<\pi\} \xrightarrow{w} \{w \mid -\pi<\arg w<\pi\}.$





$$w = e^z \qquad \underline{e^{x+iy} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho = e^x, \varphi = y.}$$

垂直带域 $D = \{z \mid x_1 < \mathrm{Re} z < x_2\}$

$\xrightarrow{w}$ $D' = \{w \mid e^{x_1} < |w| < e^{x_2}\}$ 圆环

指数函数的反函数为对数函数

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$k = 0$ 主支 $w = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ 一对一的映射。

例2 在映射 $w=e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$ 下，带域 $D=\{z:a<\mathrm{Re}z<b\}$ 映射成什么区域？

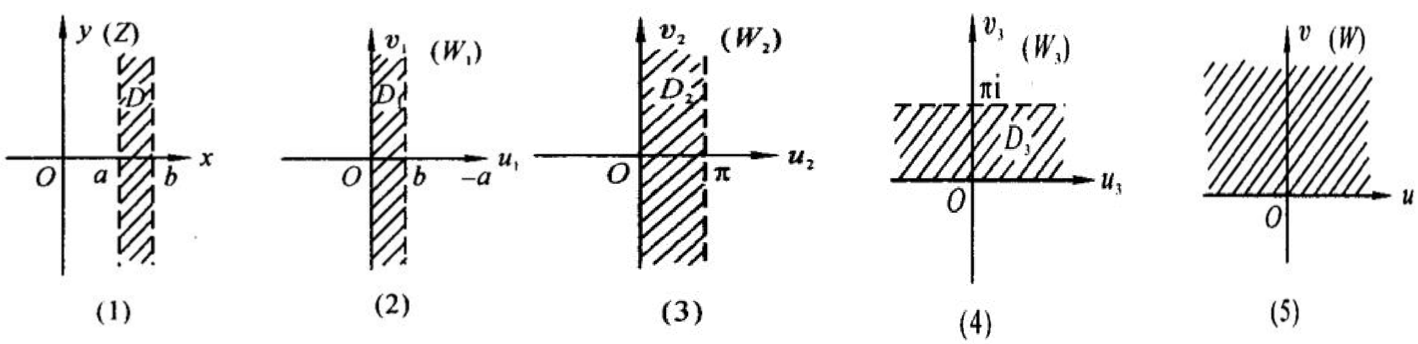
解：分解映射 $w=e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$

$w_1=z-a$ 平移 $D\xrightarrow{w_1}D_1=\{w_1:0<\mathrm{Re}w_1<b-a\}$

$w_2=\dfrac{\pi}{b-a}w_1$ 伸缩 $\xrightarrow{w_2}D_2=\{w_2:0<\mathrm{Re}w_2<\pi\}$

$w_3=iw_2$ 旋转 $\xrightarrow{w_3}D_3=\{w_3:0<\mathrm{Im}w_3<\pi\}$

$w=e^{w_3}$ 指数映射 $\xrightarrow{w}D'=\{w:\mathrm{Im}w>0\}$ 上半平面。



第6.3节 分式线性映射

1. 分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0)$

当 $c=0, d\neq 0$ 时， 整线性映射；

当 $c=b=1,\ a=d=0$ 时， 倒数映射。

分式线性映射的逆映射也是分式线性映射，且

$$w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0,\qquad -\frac{d}{c}\xrightarrow{w}\infty,\quad \infty\xrightarrow{w}\frac{a}{c}$$

w 是扩充复平面到扩充复平面上的<u>双向保角映射</u>

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}$$ 分解：

$$\begin{cases} w_1=cz+d & \text{整线性映射} \\ w_2=\dfrac{1}{w_1} & \text{倒数映射} \\ w=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}w_2 & \text{整线性映射} \end{cases}$$

w 保圆性：广义圆（直线或圆）$\rightarrow$ 广义圆

（若有一点映为 ∞，象为直线或射线）

保对称性：关于广义圆 Γ 的对称点

$\rightarrow$ 广义圆 $\Gamma'=w(\Gamma)$ 的对称点

3. 三对点的对应唯一确定一个分式线性映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)$$

仅有三个独立常数。不妨设 $a\neq 0, c\neq 0$ ，则

$$w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{记}}{=}k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

给定三对点的对应，可唯一确定 $k,\alpha,\beta.$

也可用以下定理求出分式线性映射。

定理 6.3.1 设 z_1, z_2, z_3 在Z平面上，w_1, w_2, w_3 在W平面上，则存在唯一的分式线性映射，将 z_1, z_2, z_3 依次映为 w_1, w_2, w_3。

解：设 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0) \Rightarrow w_k = \dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$ $(k=1,2,3)$

$$\therefore \quad w - w_k = \frac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)} \quad (k=1,2)$$

$$w_3 - w_k = \frac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)} \quad (k=1,2)$$

由上两式得：
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

注：若有 ∞ 点，去掉含有该点的两项（视该俩项的商在无穷远处极限为 1）。

例如：若 $z_2=\infty$，则

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z_3-z_1}.$$

若 $w_2=\infty$，则

$$\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\quad .$$

例3 试求将 Z 平面上三点 $1,-i,i$ 分别映为 W平面上三点 $1,-1,0$ 的分式线性映射。

解一：由定理 6.3.1

$$\frac{w-1}{w+1}\cdot\frac{0+1}{0-1}=\frac{z-1}{z+i}\cdot\frac{i+i}{i-1}\Rightarrow w=\frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+(1+3i)}.$$

解二：设 $w=k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$

由已知 $i\xrightarrow{w}0\Rightarrow\alpha=i.$ 且

$$1=k\frac{1-i}{1-\beta},\quad -1=k\frac{-i-i}{-i-\beta}\Rightarrow\ \beta=-\frac{1+3i}{1-3i},k=\frac{1+i}{1-3i}$$

$$\therefore\ w=\frac{1+i}{1-3i}\cdot\frac{z-i}{z+(1+3i)/(1-3i)}.$$

例 4 中心分别在 $z=1,-1$ ，半径为 $\sqrt{2}$ 的两圆弧 C_1, C_2 围成区域 D，试求在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的象区域 D'.

解：如图，因 $i\to 0,\ -i\to\infty,\ C_1\perp C_2$，由保圆性和保角性，

C_1, C_2 的象为过原点的两垂直射线 C_1', C_2'. 取 $\sqrt{2}-1\in C_1$

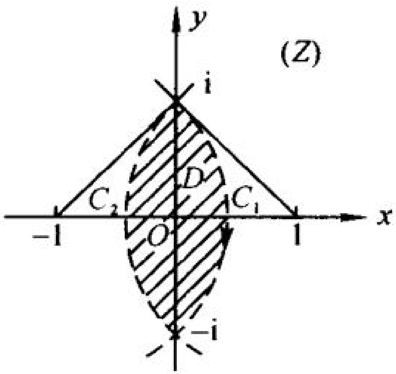
$$\sqrt{2}-1\xrightarrow{w}\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1+i)\in III\text{ 象限}$$

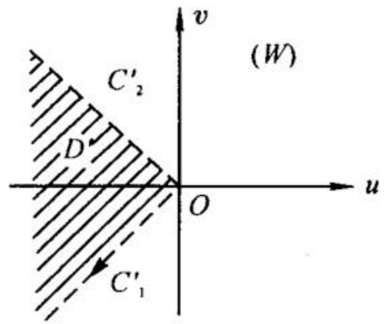
$\Rightarrow C_1'$ III象限平分线

由边界对应原理：C_2'

为II象限平分线，D'

是以 C_1', C_2' 为边界的角域。





重点讨论两类问题

1．给定区域和保角映射，求其象区域。

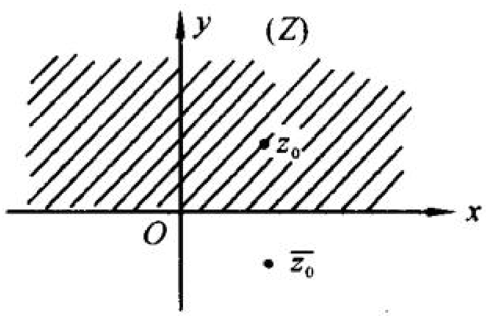
2．求一保角映射，把一已知区域映射为一已知的象区域。

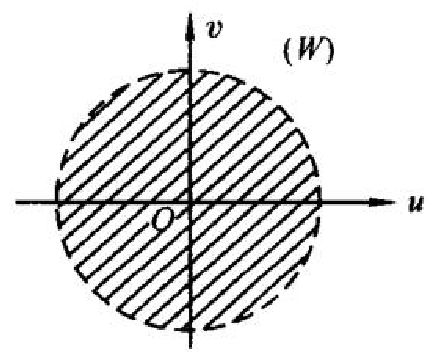
方法：坐标变换分析，已知的初等映射和分式线性映射的复合，基本性质及原理的应用（保角性，保圆性，保对称性，边界对应原理等）。

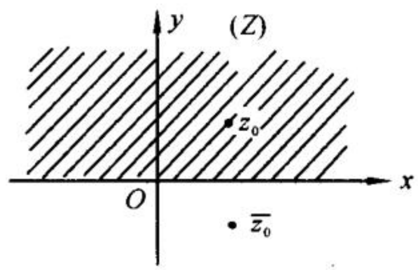
3. 两个重要的分式线性映射

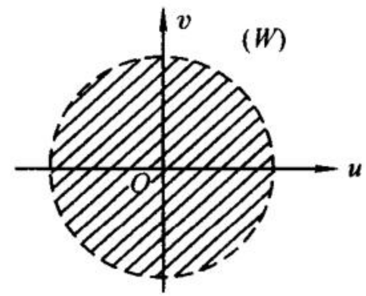
(1) 将上半平面映成单位圆内部的分式线性映射

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \qquad (\operatorname{Im} z_0 > 0,\ \theta \text{ 实数})$$









证：设映射为 $w=k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$，且 z_0 映为圆心 $w=0$.

则 $\alpha=z_0$. 由保对称性，z_0 的对称点 $\overline{z_0}$ 映为 $w=0$ 的对称点 ∞. 所以 $\beta=\overline{z_0}$，即 $w=k\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$. 由边界对应原理，当 $z=x$（实轴）时，象为 $|w|=1$.

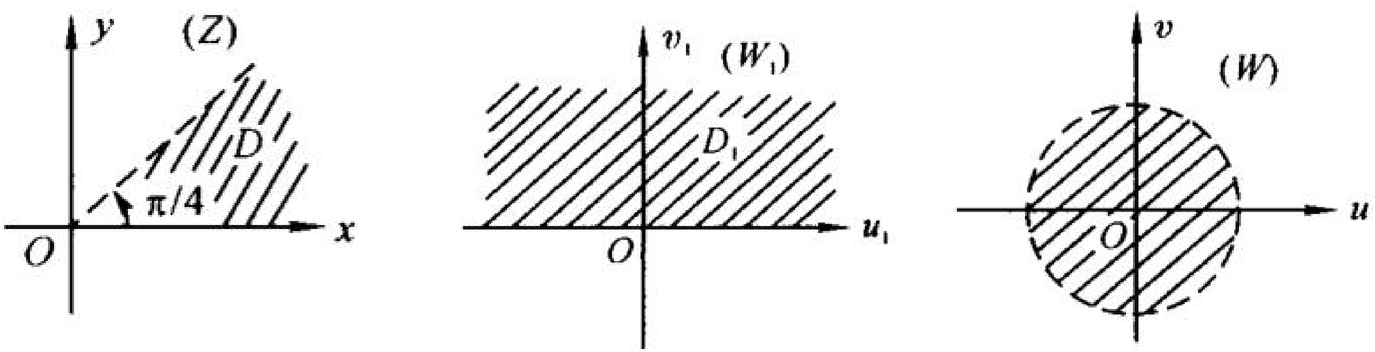
$$|k|\frac{|x-z_0|}{|x-\overline{z_0}|}=1\Rightarrow|k|=1\Rightarrow k=e^{i\theta}\ (\theta\text{ 实数}).$$

例5 求把角域 $D=\{z:0<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$ 映为单位圆内部 $|w|<1$ 的保角映射。

解： $w_1=z^4$ $\qquad D\xrightarrow{w_1}D_1=\{w_1:\mathrm{Im}w_1>0\}$

$$w=\frac{w_1-i}{w_1+i}\qquad\rightarrow|w|<1$$

复合得： $w=\dfrac{z^4-i}{z^4+i}$ （不唯一）。



例6 求把上半平面映射成单位圆内部，且使 $w(i)=0$ 与 $\arg w'(i)=0$ 的分式线性映射。

解： 设 $w = e^{i\theta} \cdot \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$.

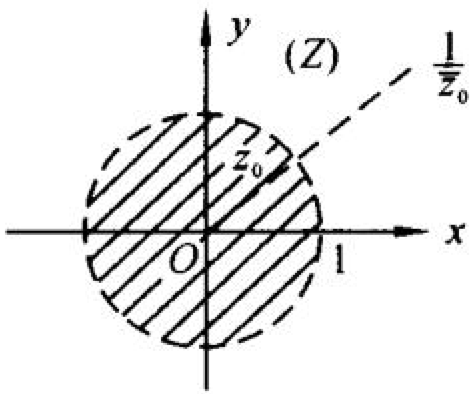
$$w(i)=0 \Rightarrow z_0=i. \qquad \therefore \quad w = e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}.$$

$$w'(i) = e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)'\Big|_{z=i} = e^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}.$$

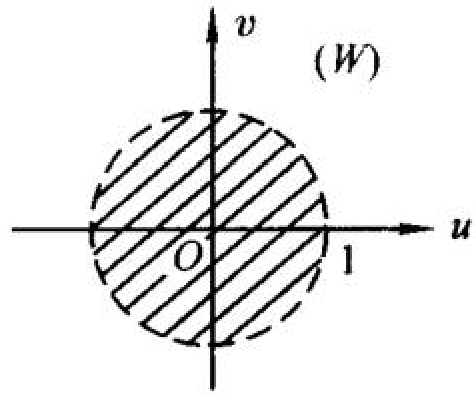
$$\arg w'(i)=0 \Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{2}. \qquad \therefore \quad w = i\,\frac{z-i}{z+i}.$$

(2)　将单位圆内部映为单位圆内部的分式线性映射

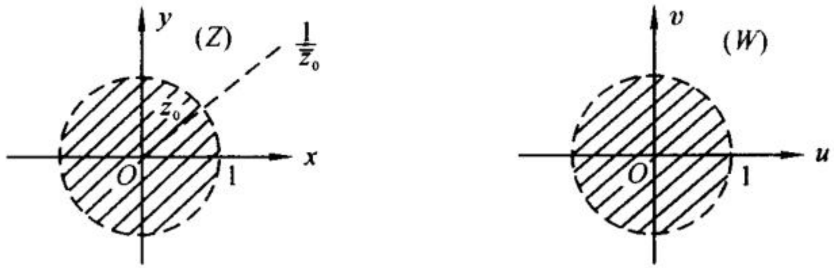
$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \qquad (|z_0| < 1,\ \theta \text{ 实数})$$



$|z| < 1$



$|w| < 1$



证：设映射 $w=k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$，且 z_0 映为圆心 $w=0$ 。

$$\therefore \quad \alpha = z_0.$$

由保对称性，z_0关于$|z|=1$ 的对称点为 $\overline{z_0}^{-1}$，

其象为 $w=\infty$. 所以 $\beta=\overline{z_0}^{-1}$.

则 $$w=k\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}^{-1}}=k'\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \quad (k'=-k\overline{z_0}).$$

$$\because \quad |z|=1 \to |w|=1, \quad |z|=1 \Rightarrow z^{-1}=\overline{z}$$

$$\therefore \quad 1=|w|=|k'||z|\frac{|1-z_0\overline{z}|}{|1-\overline{z_0}z|}=|k'| \Rightarrow k'=e^{i\theta}\ (\theta\text{ 实数}).$$

例9 求将上半平面映射为圆域 $|w-w_0|<R$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，且满足 $f(i)=w_0, f'(i)>0.$

解： $w_1=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$ $\qquad \operatorname{Im} z>0 \xrightarrow{w_1} |w_1|<1$

且 $w_1(i)=0.$ $\qquad w=Rw_1+w_0$ $\qquad |w_1|<1 \xrightarrow{w} |w-w_0|<R.$

复合： $w=\mathrm{Re}^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}+w_0$ $\qquad w(i)=w_0.$

$$w'(i)=\mathrm{Re}^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}\Big|_{z=i}=\frac{R}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}.$$

$$f'(i)>0\Rightarrow \arg w'(i)=0\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad w=Ri\frac{z-i}{z+i}+w_0.$$

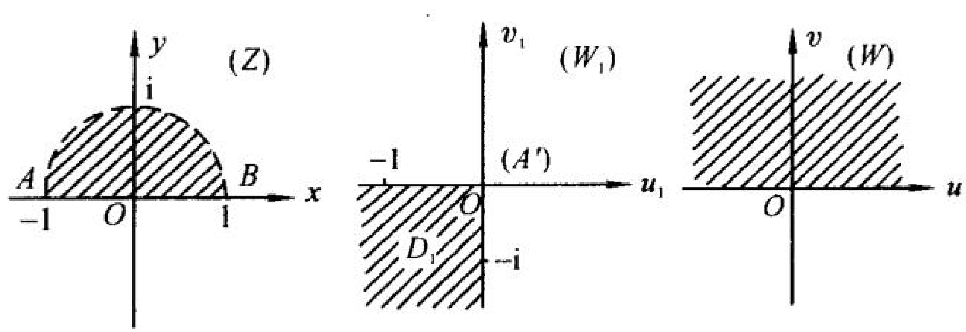
例7 试求一保角映射，将区域 $D=\{z:|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$ 映射成 $\{w:\operatorname{Im}\ w>0\}.$

解：取 $w_1=\dfrac{z+1}{z-1}.$ $-1\xrightarrow{w_1}0,\ 1\xrightarrow{w_1}\infty.$ （拉直边界）

由保圆性，w_1 将直线段 $\overline{AB}$ 及上半圆周映为原点出发的两射线。取 $0\in\overline{AB}, 0\to-1.$ 知 $\overline{AB}$ 的象为负实轴。由保角性及边界对应原理：上半圆周的象为下半虚轴，即 w_1将 D 映为第三象限，所以

$$w=(-w_1)^2$$

$$=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

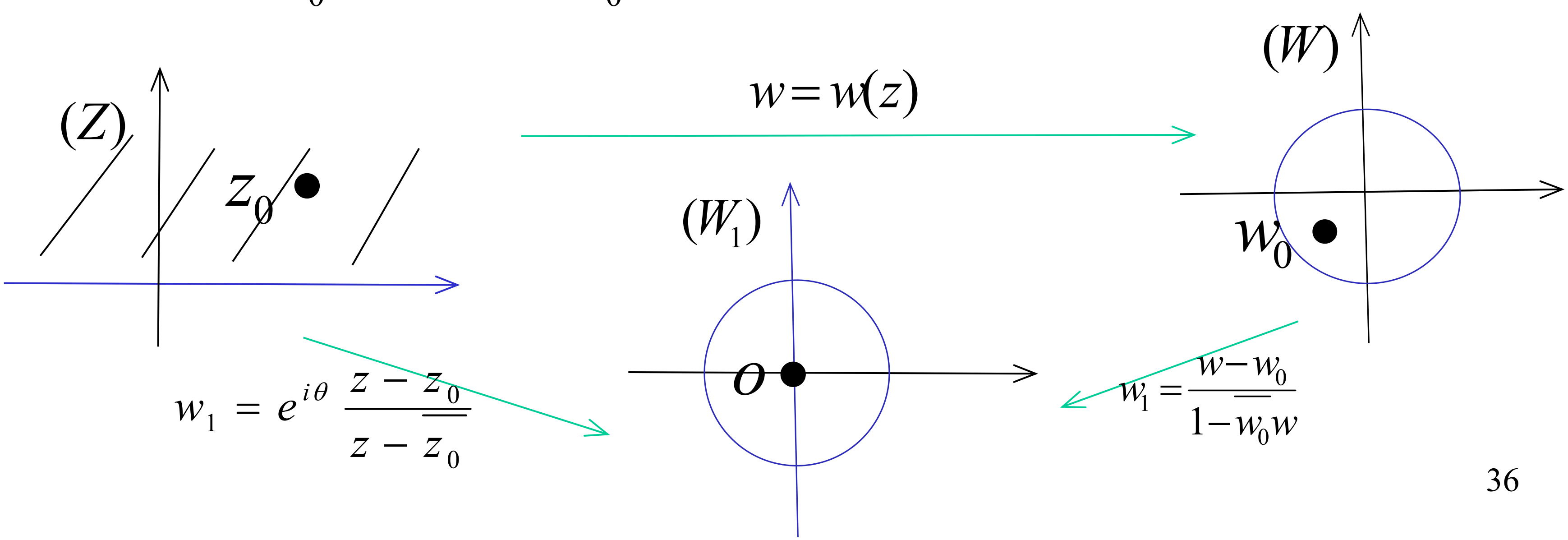


例. 求将上半平面映成单位圆内部的分式线性映射，使得 $w(z_0)=w_0,$ 其中 $\operatorname{Im} z_0>0, |w_0|<1.$

解： 将Z平面的上半平面和W平面中的单位圆都映射到W1平面中的单位圆，且分别把 z_0, w_0 都映射为原点，即

$$e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}=w_1=\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}\Rightarrow w=w(z)$$

（不唯一，θ待定）



一、（每题 8 分，共 32 分）

（1）求在映射 $w=\dfrac{1}{iz+1}$ 下 x 轴的像曲线的表达式。

解：易知 $w=\dfrac{1}{iz+1}$ 映 x 轴为圆　　且 $w: i\to\infty$

i 关于 x 轴的对称点是 $-i$　　∞ 关于圆的对称点是圆心

由保对称性知　$w: -i\to$ 圆心　即圆心为 $z_0=1/2$

且 $w: 0\to 1$　即圆过 1 点　　所以圆为 $\left|z-1/2\right|=\left|1-1/2\right|=1/2$

四、(16 分)（1）求分式线性映射 $w(z)$，把-1, i,1 映成 0,1,∞；且问 $w(z)$ 把单位圆映为什么区域?

解：分式线性映射 $w(z)$ 由方程 $\frac{w}{w-\infty}\frac{\infty-1}{0-1}=\frac{z+1}{z-1}\frac{1-i}{-1-i}\Rightarrow w=-\frac{1-i}{1+i}\frac{z+1}{z-1}=i\frac{z+1}{z-1}$

在单位圆周上 -1, i,1 是逆向　　所以单位圆映为下半平面。

（2）求保角映射 w，将上半平面映为单位圆且 $w(i)=1/2$，$w(0)=1$。

解：i 关于 x 轴的对称点是 $-i$　　$1/2$ 关于单位圆的对称点是 2

由保对称性知　$w:-i\to 2$　　$w(z)$ 由方程 $\frac{w-2}{w-1}\frac{1-1/2}{2-1/2}=\frac{z+i}{z}\frac{0-i}{-i-i}$

$$\Rightarrow\frac{w-2}{w-1}=\frac{3}{2}\frac{z+i}{z}\Rightarrow w=-\frac{z-3i}{z+3i}$$

四、(16 分)（1）试作保角映射 $w(z)$,把区域$\{ z = x + iy \mid x < 0, 0 < y < 1\}$ 映为区域

$\{ w = u + iv \mid |w| < 1, v > |u|\}$ 。

解： $w_1 = \pi z / 2$

$w_2 = e^{w_1}$

$w_3 = e^{i\pi/4} w_2$ 即 $w = e^{i\pi/4} e^{\pi z/2}$

（2）求保角映射 w ，将上半单位圆映为单位圆且 $w(i\sqrt{2} - i) = 0$， $w(0) = 1$ 。

解： $w_1 = \dfrac{1+z}{1-z}$ 将上半单位圆映为第一象限 $i\sqrt{2} - i$ 映为 $(1+i)/\sqrt{2}$

$w_2 = w_1^2$ 映为上半平面 $(1+i)/\sqrt{2}$ 映为 i

$w_3 = e^{i\theta} \dfrac{w_2 - i}{w_2 + i}$ 映为单位圆 i 映为 0

即 $w = e^{i\theta} \dfrac{(1+z)^2 - i(1-z)^2}{(1+z)^2 + i(1-z)^2}$ 将上半单位圆映为单位圆且 $w(i\sqrt{2} - i) = 0$

由 $w(0) = 1$ $\Rightarrow 1 = e^{i\theta} \dfrac{1-i}{1+i} \Rightarrow e^{i\theta} = i$ 所以 $w = \dfrac{i(1+z)^2 + (1-z)^2}{(1+z)^2 + i(1-z)^2}$

复变函数与拉普拉斯变换

第七章 拉普拉斯变换

第7.1节　拉氏变换的基本概念

1. 拉氏变换的定义

设 $f(t)$ 是实变量复值函数，称

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, s\in D\subset C \qquad (\infty=+\infty)$$

为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换（或象函数），记为

$$F(s)=L[f(t)].$$

称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换（或象原函数），记为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)].$$

例1 求 $f(t)=e^{kt}u(t)$ 的LT，其中 $u(t)$ 是单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

k 是复常数。

解：$L[e^{kt}u(t)]=\int_0^{\infty} e^{kt}e^{-st}dt=\frac{1}{k-s}e^{(k-s)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-k},\ \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(k).$

一般 t 指时间，<u>在不引起混淆时</u>，规定：$f(t)\equiv 0,\ t<0.$

即常省略 $u(t)$.

$$L[e^{kt}]=\frac{1}{s-k},\ L^{-1}[\frac{1}{s-k}]=e^{kt}=e^{kt}u(t).$$

特殊 $L[u(t)]=L[1]=\frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s)>0.$

2. 拉氏变换的存在性定理

LT 存在定理 若复值函数 $f(t)$ 满足：

（1）在 $t \geq 0$ 的任意有限区间上分段连续；

（2）$\exists M > 0, \sigma_0 > 0$, 使得

$$| f(t) | < Me^{\sigma_0 t}, \quad t > 0,$$

则 $L[f(t)]$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ 上存在且解析。

证：略(见P200)。

称 σ_0 为函数 $f(t)$ 的增长指数。下面例子说明存在定理中条件是充分条件而不必要。

例2 求 $f(t)=t^a\ (a>-1)$ 的 LT.

解：若 $\mathrm{Re}(s)=\sigma>0$,

$$\int_0^\infty |t^a e^{-st}|\,dt=\int_0^\infty t^a e^{-\sigma t}dt=\frac{1}{\sigma^{a+1}}\int_0^\infty u^a e^{-u}du=\frac{\Gamma(a+1)}{\sigma^{a+1}}.$$

类似 $\int_0^\infty \left|\frac{d}{ds}(t^a e^{-st})\right|dt=\frac{\Gamma(a+2)}{\sigma^{a+2}}$。 $F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 内存在且解析。由上式，当 s 为实数时，有

$$F(s)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}.$$

上式左右两式在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 上都解析，由解析函数唯一性，

$$L[t^a]=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

$$L[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

注： 当 $-1 < a < 0$ 时，存在定理条件不满足。

特别： 因为 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!$，有

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \mathrm{Re}(s) > 0.$$

第7.2节　拉氏变换的基本性质

本节总假设LT 存在定理条件满足，且 $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

7.2.1　线性性质

$$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)]$$

或 $$L^{-1}[k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)] = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t).$$

证: 由**LT** 的定义易见，略。

$$L[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$$

例3 $L[\sin\omega t]$ （ω实数）$=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(s)>0$.

证： $L[\sin\omega t]=L[\dfrac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}]$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\ \mathrm{Re}(s)>0.$$

类似： $L[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(s)>0$.

$$L[sh\,\omega t]=\frac{\omega}{s^2-\omega^2},\quad \mathrm{Re}(s)>|\omega|.$$

$$L[ch\,\omega t]=\frac{s}{s^2-\omega^2},\quad \mathrm{Re}(s)>|\omega|.$$

例5 求 $L^{-1}[\dfrac{s}{(s+2)(s+4)}]$.

解： $L^{-1}[\dfrac{s}{(s+2)(s+4)}]$

$$=L^{-1}[\frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+2}]$$

$$=2e^{-4t}-e^{-2t}.$$

7.2.2 平移性质

若在此省略 $u(t-t_0)$，
则易混淆截断点。

1. 时移性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，则 $\forall\, t_0>0$，有

$$L[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$$

或 $L^{-1}[e^{-st_0}F(s)]=f(t-t_0)u(t-t_0).$

证：$L[f(t-t_0)]=\int_0^{\infty}f(t-t_0)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{\infty}f(t-t_0)e^{-st}dt$

$$=\int_{t_0}^{\infty}f(t-t_0)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}f(u)e^{-s(u+t_0)}du=e^{-st_0}F(s).$$

例：$L[u(t-2)]=\dfrac{e^{-2s}}{s}$，$\quad L^{-1}[\dfrac{e^{-s}}{s^2+1}]=\sin(t-1)u(t-1).$

例： 设 $f(t)$ 以 T 为周期，求 $L[f(t)]$.

解： 记 $f_1(t)=\begin{cases} f(t), & 0<t<T \\ 0, & 其它. \end{cases}$

$$L[f_1(t)]=F_1(s)=\int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

$\because \quad f(t)=f_1(t)+f_1(t-T)+f(t-2T)+\cdots$

$\therefore \quad L[f(t)]=F_1(s)+e^{-sT}F_1(s)+e^{-2Ts}F_1(s)+\cdots$

当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，$|e^{-Ts}|<1$. 所以

$$L[f(t)]=\frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}=\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-Ts}}.$$

2. 频移性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，则$\forall\ s_0$，有 $\underline{L[e^{s_0 t}f(t)]=F(s-s_0).}$

证：$L[e^{s_0 t}f(t)]=\int_0^{\infty}e^{s_0 t}f(t)\cdot e^{-st}dt=F(s-s_0).$

例 9. 设 $\alpha>-1$, 则

$$L[t^{\alpha}e^{-\lambda t}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s+\lambda)^{\alpha+1}},\qquad \left(\Leftarrow L[t^{\alpha}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right)$$

$$L[e^{-\lambda t}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2},$$

$$L[e^{-\lambda t}\cos\omega t]=\frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}.$$

7.2.3 微分性质

1. 象原函数的微分性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，且 $f'(t)$也是象原函数，则

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0^+).$$

证：
$$L[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$
$$=f(t)e^{-st}\big|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt$$
$$=sF(s)-f(0^+),\ \mathrm{Re}(s)>0.$$

推论：$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-s^{n-2}f'(0^+)-\cdots-f^{(n-1)}(0^+).$

证：用归纳法易证，略。

2. 象函数的微分性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，则

$$L[(-t)^n f(t)]=F^{(n)}(s),\quad n=0,1,2\cdots.$$

证：$F'(s)=\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$$=\int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-st}dt=L[(-t)f(t)].$$

归纳可推得结论。

例10 $L[t\sin\omega t]=-L[\sin\omega t]'$

$$=-\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)'=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

7.2.4 积分性质

1. 象原函数的积分性质

若 $L[f(t)]=F(s)$, 则 $L[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}F(s).$

证：记 $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau,$ 用微分性质，有

$$F(s)=L[f(t)]=L[g'(t)]=sL[g(t)]-g(0^+)=sL[g(t)]$$

$$\therefore \quad L[g(t)]=\frac{1}{s}F(s).$$

推论：$$L[\overbrace{\int_0^t dt\cdots\int_0^t dt\int_0^t}^{n} f(t)dt]=\frac{1}{s^n}F(s).$$

2. 象函数的积分性质

若 $L[f(t)]=F(s)$, $\int_s^{\infty} F(s)ds$ 收敛，则 $L[\frac{f(t)}{t}]$ 存在，且

$$L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty} F(s)ds,$$

其中积分路径位于$\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$ 内，σ_0为 $f(t)$的增长指数。

证：记 $L[\frac{f(t)}{t}]=G(s)$, 则

$$G'(s)=L[-f(t)]=-F(s)\Rightarrow G(s)=\int_s^{\infty} F(s)ds.$$

例11 $L[\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt]=\frac{1}{s}L[\frac{\sin t}{t}]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty} L[\sin t]ds$

$$=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-\arctan s).$$

7.2.5 极限性质

设 $L[f(t)] = F(s)$, $sF(s)$ 的奇点在 $\mathrm{Re}(s) < 0$ 内，则

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s), \qquad f(+\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

证：由微分性质，$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+)$.

在上式中，分别令 $s \to \infty, s \to 0$ 可得结果。

例12 若 $L[f(t)] = \dfrac{1}{s+a}$ $(a > 0)$，求 $f(0), f(+\infty)$.

解：

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+a} = 1, \quad f(+\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+a} = 0.$$

注：由 $f(t) = e^{-at}$ 也可解。

7.2.6 卷积性质

卷积定义：称如下积分为 $f_1(t), f_2(t)$ 的卷积，记

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

卷积 $*$ 满足结合律，交换律，对加法的分配率。

在LT中，$f(t) \equiv 0,\ t < 0,$ 所以

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

例 13 $$t * \sin t = \int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau$$

$$= \tau \cos(t-\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau$$

$$= t + \sin(t-\tau) \Big|_0^t = t - \sin t.$$

卷积定理： 设 $L[f(t)]=F(s)$, $L[g(t)]=G(s)$, 则

$$L[f(t)*g(t)]=F(s)\cdot G(s)$$

或 $$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)]=f(t)*g(t).$$

证： 由LT，卷积定义及重积分交换积分次序可证，略。

例15 若 $L[f(t)]=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$，求 $f(t)$.

解： $$f(t)=\frac{1}{9}L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]*L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

$$=\frac{1}{9}(e^{-2t}\sin 3t)*(e^{-2t}\sin 3t)$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t e^{-2\tau}\sin 3\tau\cdot e^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{e^{-2t}}{9}\int_0^t \sin 3\tau\cdot\sin 3(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{e^{-2t}}{9}\int_0^t \frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t)-\cos 3t]d\tau$$

$$=\frac{e^{-2t}}{54}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

第7.3节　拉氏逆变换

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,\ L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

本节介绍求 L^{-1} 的几种方法。

定理7.3.1（反演公式）　若 $f(t)$ 满足LT 存在定理条件，则在 $f(t)$ 的连续点处，　有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st}ds \quad \left(= \lim_{R\to +\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} F(s)e^{st}ds \right)$$

其中积分沿任一直线 $\mathrm{Re}(s) = \sigma (> \sigma_0)$ 的主值积分。

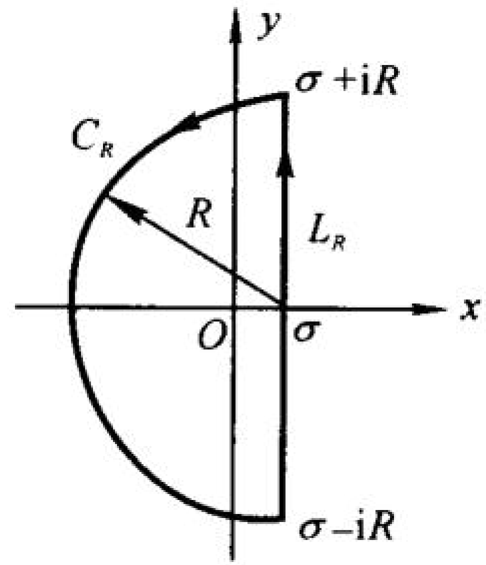
利用留数计算 L^{-1}

定理7.3.2 若 $F(s)$ 的全部奇点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 都在 $\mathrm{Re}(s) < \sigma$ 内，且 $F(s) \to 0 \ (s \to \infty, \mathrm{Re}(s) \le \sigma)$,

则：

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[F(s)e^{st}; s_k], \quad t > 0.$$

证：如图，当 R 充分大时，函数 $F(s)e^{st}$ 的奇点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 都在半圆内，由留数定理，得



$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[F(s)e^{st}; s_k]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C F(s)e^{st}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} F(s)e^{st}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(s)e^{st}ds \overset{记}{=} I_1 + I_2.$$

令 $R \to +\infty$，由约当引理，$I_1 \to 0$; 由反演公式，$I_2 \to f(t)$. 证毕。

例17 用几种不同方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ 的拉氏逆变换。

解法一（分解法）：

$$F(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1},\qquad \therefore\ L^{-1}[F(s)]=-1+t+e^{-t}.$$

解法二（留数法）：

$$L^{-1}[F(s)]=\mathrm{Res}[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};0]+\mathrm{Res}[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};-1]$$

$$=\lim_{s\to 0}(\frac{e^{st}}{s^2(s+1)}\cdot s^2)'+\lim_{s\to -1}\frac{e^{st}}{s^2}\quad=-1+t+e^{-t}.$$

解法三（卷积法）：

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s^2}]*L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=t*e^{-t}$$

$$=\int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}d\tau\quad=-1+t+e^{-t}.$$

定理 7.3.3（展开定理） 如果 $F(s)$ 在 $R<|s|<\infty$ 内罗朗展开式为 $F(s)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{s^{n+1}}$，那么

$$L^{-1}[F(s)]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}t^n.$$

证：略。（逐项求逆）

例 20 求 $f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}]$.

解：
$$\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{1}{s})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{s^{n+1}}$$

$$\therefore\quad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!^2}t^n.$$

求 L^{-1} 的几种方法 ：分解法，留数定理，卷积法，展开法，定义，性质及基本公式。

第7.5节 拉氏变换的应用

$y(t)$ 的常系数线性微分方程的初值问题 $\xrightarrow{\text{拉氏变换（微分性质）}}$

$Y(s)=L[y(t)]$ 的代数方程 $\rightarrow$ 解得 $Y(s)\xrightarrow{L^{-1}}y(t)$.

例 22 求方程 $y''+4y'+3y=e^{-t}$，$y(0)=y'(0)=1$ 的解。

解：设 $L[y(t)]=Y(s)$,方程取 LT，得

$$(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+4(sY(s)-y(0))+3Y(s)=\frac{1}{s+1}.$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+3}.$$

$$\therefore\quad y(t)=\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{te^{-t}}{2}-\frac{3}{4}e^{-3t}.$$

注：方程组类似，见 P227 例 23.

12 (P235). 求下列积分方程的解:

(1) $$y(t)+\int_0^t y(t-u)e^u du = 2t-3$$

解: 记 $Y(s)=L[y(t)]$, 则

$$Y(s)+Y(s)\cdot\frac{1}{s-1}=2\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)=\frac{-3s^2+5s-2}{s^3}$$

$\therefore \quad y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-3+5t-t^2.$

9 (6). $F(s)=\ln\dfrac{s^2+1}{s^2}$, 求 $L^{-1}[F(s)]$.

解: $$F'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}$$

$$L^{-1}[F'(s)]=2\cos t-2$$

而 $$L[(-t)f(t)]=F'(s)$$

得: $$L^{-1}[F(s)]=f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]$$

$$=\frac{2}{t}-\frac{2}{t}\cos t.$$

2（P_{234}）. 求下列函数的拉氏变换.

（2）. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 1\\ 1, & 1<t<2\\ 0, & t\geqslant 2.\end{cases}$

$L[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$.

解: $f(t)=u(t-1)-u(t-2)$

时移性质.

$\therefore\quad L[f(t)]=\dfrac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$.

(用定义也可求).

9. 求拉氏逆变换.

（4）. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s(s^2+1)}$ （不能用留数定理 $\because$ $F(s)\nrightarrow 0,\ s\to\infty$）.

解. $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right]=1-\cos t$

由时移性质. $L^{-1}[F(s)]=\left(1-\cos(t-1)\right)u(t-1)$.

五、（16分）1) $f(t)=\int_0^{2t} e^{-\tau}\sin\tau d\tau + t\,u(t-3)$,求 *Laplace* 变换 $L[f(t)]$ 。

解：$f(t)=2\int_0^{t} e^{-2\tau}\sin 2\tau d\tau+(t-3+3)\,u(t-3)$

所以 $L[f(t)]=\frac{2}{s}L[e^{-2t}\sin 2t]+e^{-3s}(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s})=\frac{2}{s}\frac{2}{(s+2)^2+2^2}+e^{-3s}(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s})$

2) 设 $F(s)=e^{-s}\ln\frac{s}{s+1}$ ，求 *Laplace* 逆变换 $L^{-1}[F(s)]$ 。

解：$(\ln\frac{s}{s+1})'=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$ 由微分性质 $L^{-1}[\ln\frac{s}{s+1}]=\frac{1}{-t}L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}]=\frac{e^{-t}-1}{t}$

所以 $L^{-1}[F(s)]=\frac{e^{1-t}-1}{t-1}u(t-1)$

五、(16分) 1) $f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau + t\,u(t-3)$,求 Laplace变换 $L[f(t)]$;

解: $f(t)=e^t * \sin t+(t-3+3)\,u(t-3)$ $\quad L[f(t)]=\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1}+(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s})e^{-3s}$

2) 设 $F(s)=\frac{e^{-s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}$,求 Laplace逆变换 $L^{-1}[F(s)]$。

解: $\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{s^2+2s+2}$ $\quad L^{-1}[\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}]=(1-\cos t)e^{-t}$

$$L^{-1}[F(s)]=(1-\cos(t-1))e^{1-t}u(t-1)$$